Elektromagnetische Formfaktoren für virtuelle Nukleonen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

BASIL KOTSAKIS

aus Filiatra/Griechenland

1970

Elektromagnetische Formfaktoren für virtuelle Nukleonen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

BASIL KOTSAKIS

aus Filiatra/Griechenland

1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 1970

Dekan: Dozent Dr. R. Schief

1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Schmid

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Mitter

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
Einleitung		1
I. Teil	Theorie der elektromagnetischen Formfaktoren und Anwendungen	
§ 1	Definition der Formfaktoren	4
§ 2	Dispersionsrelationen für die Formfaktoren	9
§ 3	Anwendungen	11
II. Teil	Der absorptive Teil der elektromagnetischen Formfaktoren	
§ 4	Allgemeiner Ausdruck und 1. Näherung	15
§ 5	Explizite Form in 1. Näherung	16
III. Teil	Berechnung des absorptiven Teils der elektromagnetischen Formfaktoren	
§ 6	Die Güte der Näherung und inelastische Effekte	27
§ 7	Der π-N-Formfaktor	32
§ 8	Multikanal-Modell für den π—N-Formfaktor	35
§ 9	Berechnung der Elektroproduktionsamplituden	41
§ 10	Ergebnisse und Zusammenfassung	47
Literatur		
Anhang		
Bornsche Terme der Amplituden für Elektroproduktion		I

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547603_0019

Einleitung

Anhand verschiedener Experimente mit Nukleonen, in denen die Wechselwirkung elektromagnetischer Natur ist (etwa e-P-Streuung bei hohen Energien), wurde festgestellt, daß die Nukleonen sich nicht punktförmig verhalten, d.h. sie weisen eine innere Struktur auf. Man trägt dieser elektromagnetischen Struktur Rechnung, indem man die elektromagnetischen Formfaktoren der Nukleonen einführt. Sie beschreiben - anschaulich gesagt - die Verteilung der Ladung und des magnetischen Moments im "Innern" des Nukleons.

Man kann die Struktur des Nukleons auf relativistische und Quanteneffekte zurückführen. Dementsprechend werden die elektromagnetischen Formfaktoren im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie definiert, und zwar als Matrixelemente eines Vertex, der die Absorption bzw. Emission eines Photons durch ein Nukleon beschreibt (zwei äussere Nukleon- und eine äussere Photonlinie). Dieser Vertex tritt nämlich auf, wenn man etwa das e-P-Streuexperiment in 1. elektromagnetischer Näherung untersucht. Das Vertexmatrixelement kann auf Grund der Lorentz- und Eichinvarianz auf zwei Formfaktoren $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ (q^2 ist das Viererimpulsquadrat) reduziert werden, die im nichtrelativistischen Limes tatsächlich als die Fouriertransformierten der Verteilungsfunktionen von Ladung und magnetischem Moment interpretiert werden können.

Die obengenannten Formfaktoren $F_1(q^2)$ und $F_2(q^2)$ entsprechen einem Vertex, von dem nur die äussere Photonlinie virtuell ist. In vielen anderen Experimenten mit elektronen, Photonen und Nukleonen (etwa Photo- und Elektroproduktion) tritt jedoch ein Vertex auf, bei dem auch eines der Nukleonen virtuell ist (d.h. es liegt nicht mehr auf der Massenschale). Gerade zu diesem Zweck werden in dieser Arbeit die dazugehörigen Formfaktoren für virtuelle Nukleonlinie untersucht und berechnet.

Die Formfaktoren für virtuelle Nukleonen sind allerdings darüber hinaus geeignet, einen noch weitergehenden Einblick

in die elektromagnetische Struktur des Nukleons zu geben als die üblichen Formfaktoren. Mit diesem Aspekt haben sich die meisten bisher veröffentlichten Arbeiten über die Formfaktoren für virtuelle Nukleonen befaßt, wobei man die Formfaktoren für nur geringe Abweichung von der Massenschale zu kennen braucht.

In unserer Arbeit haben wir uns die Berechnung der Formfaktoren für einen höheren Virtualitätsgrad des Nukleons (größere Entfernungen von der Massenschale) vorgenommen, woraus sich größere Anwendungsmöglichkeiten ergeben.

Im I. Teil dieser Arbeit wird die allgemeine mathematische Struktur des Vertex mit einer virtuellen Nukleonlinie sowie die dazugehörigen Formfaktoren untersucht. Daneben wird die physikalische Interpretation der Formfaktoren ausführlicher erläutert, und es wird auf Anwendungsmöglichkeiten hingewiesen.

Der weiteren Behandlung der Formfaktoren haben wir die Dispersionsrelationen zugrundegelegt. Aus diesem Grunde ist die Kenntnis des absorptiven Teils der Formfaktoren von größtem Interesse. Dieser Frage ist der II. Teil der Arbeit gewidmet. Wir beschränken uns dort auf die niedrigste Näherung (π -N-Zustand) und führen eine Partialwellenanalyse durch, wobei sich ergibt, daß der absorptive Teil der Formfaktoren aus dem π-N-Formfaktor und der s- und p-Welle der Elektroproduktion (im Isospin-Kanal $\frac{1}{2}$) bestimmt wird.

Diese Größen werden im letzten Teil wiederum dispersionstheoretisch behandelt. Hier ist aber die Anwendung des Watson-Theorems problematisch, da in den uns interessierenden Kanälen S_{11} und P_{11} die inelastischen Effekte sehr stark sind. Aus dem Grunde wird die Einführung einer inelastischen Phase im Watson-Theorem vorgeschlagen und begründet. Die Elektroproduktionsamplituden werden in Analogie zur Photoproduktion behandelt. Einige phänomenologische Daten aus der Photoproduktion werden hier in abgeänderter Form übernommen unter Berufung auf die Strukturähnlichkeit zwischen Elektro- und Photoproduktionsamplituden.

Zum Schluß bringen wir die numerischen Ergebnisse unserer Untersuchung. Wir haben folgende Größen berechnet:

1. Den magnetischen Formfaktor für reelles Photon und virtuelles Proton
2. Beide Formfaktoren für virtuelles Photon und reelles Proton
3. Den magnetischen und Ladungsradius des Protons.

Aus all diesen Ausführungen geht nun hervor, daß die elektromagnetischen Formfaktoren für virtuelle Nukleonen in zweifacher Hinsicht von großer Bedeutung sind:

1. Für die Untersuchung der elektromagnetischen Struktur der Nukleonen. Da die Behandlung der üblichen Formfaktoren $F_i(q^2)$ zu noch keinen zufriedenstellenden Ergebnissen geführt hat, bietet sich die alternative Möglichkeit an,die Struktur der Nukleonen mittels Prozesse in einem "Kanal" zu untersuchen, der sich nicht auf die virtuelle Photonlinie(wie üblich), sondern auf die virtuelle Nukleonlinie bezieht.
2. Für die Untersuchung und Berechnung physikalischer Prozesse. Viele Prozesse mit Elektronen,Photonen und Nukleonen lassen sich durch den Austausch eines virtuellen Nukleons beschreiben (vgl. §§1 und3c). In diesem Fall muß man die geeigneten Virtualitätskorrekturen berücksichtigen, die von eben unseren Formfaktoren erfasst werden. Da diese Virtualitätseffekte durch die Formfaktoren in geschlossener Form dargestellt werden konnten, kann man darüber hinaus verschiedene Prozesse in Vebindung miteinander bringen. Die Berechnung solcher Prozesse könnte vereinfacht werden, wenn man das virtuelle Nukleon durch eine geeignete Resonanz ersetzte. Voraussetzung wäre allerdings, daß die virtuelle Nukleonmasse sich in der Resonanznähe befände, was im allgemeinen nicht der Fall ist (bei peripheren Prozessen z.B. ist die virtuelle Nukleonmasse negativ oder Null (vgl. §3c)).

Abschließend bemerken wir, daß die numerischen Ergebnisse (§10) unsere Theorie gut bestätigen, soweit sich Vergleiche mit experimentellen Daten oder mit anderen Modellen ziehen lassen.

I THEORIE DER ELEKTROMAGNETISCHEN FORMFAKTOREN UND ANWENDUNGEN

1. Definition der Formfaktoren für virtuelle Nukleonen

Wir untersuchen Prozesse, an denen Nukleonen und elektromagnetisch wechselwirkende Teilchen (Photonen, Elektronen) teilnehmen. Da die Nukleonen der starken Wechselwirkung unterworfen sind, machen wir die durch die Experimente vollkommen gerechtfertigte Annahme, daß wir uns bezüglich der elektromagnetischen Wechselwirkung auf die 1. störungstheoretische Näherung beschränken dürfen. Mit anderen Worten denken wir uns die elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch von nur einem Photon vermittelt. Bezüglich der starken Wechselwirkung darf man natürlich diese Annahme allgemein nicht machen. Unter gewissen kinematischen Umständen kann man jedoch versuchen, einen Prozeß durch den Austausch von einem virtuellen Nukleon zu erklären (S §3). Diesen Umstand können wir uns anhand der nebenstehenden Abbildung veranschaulichen. Sie stellt die 1. störungstheoretische Näherung (Pol-Approximation) bezüglich der starken Wechselwirkung der Elektroproduktion dar. Die Elektroproduktion unterscheidet sich von der Photoproduktion dadurch, daß das Photon k virtuell ist. Die Nukleonen p und p' und das π-Meson q sind reell. Da an den Vertizes K_1 und K_2 die Erhaltungssätze gelten müssen, ergibt sich, daß das ausgetauschte Teilchen P die Quantenzahlen des Nukleons, nicht aber seine Masse besitzt. Es handelt sich daher um ein virtuelles Nukleon.

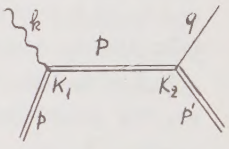

Abb. 1

Aus diesen Ausführungen geht nun hervor, daß das wesentliche Matrixelement zur Beschreibung solcher Prozesse durch $\langle p's'|j_\mu(0)|ps\rangle$ gegeben ist, wobei $|p's'\rangle$ und $|ps\rangle$ Ein-Nukleon-Zustände (mit jeweils Spin s' und s) sind und $j_\mu(0)$ den elektromagnetischen Strom darstellt: $j_\mu = -\Box A_\mu$; A_μ ist der Photonfeldoperator. Er ist, wie alle Feldoperatoren, die in dieser Untersuchung vorkommen, renormiert.

An dieser Stelle machen wir eine Unterscheidung zwischen reduziblen und irreduziblen Vertizes. Erstere werden als die Summe aller Graphen definiert, die zwei äußere Nukleon- und eine äußere Photonlinie enthalten. Die irreduziblen Vertizes sind dagegen die Summen aus allen obenerwähnten Graphen, die aber keine Selbstenergieanteile haben. Soweit die Linien p, p' und k reell sind, stimmen beide Vertizes überein. (Da wir nur die 1. Näherung in der magnetischen Wechselwirkung berücksichtigt haben, betreffen die folgenden Ausführungen die Photonlinie nicht). Nun entspricht das Matrixelement $\langle p's' | j_\mu(0) | ps \rangle$ einem reduziblen Vertex $\Gamma_\mu(p,p')$, der also auch Korrekturen für die virtuelle äußere Nukleonlinie p enthält. Diese Virtualitätskorrekturen bezeichnen wir mit Z(W), wobei die Bedeutung von W aus der hier festgesetzten Kinematik hervorgeht:

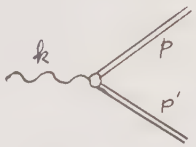

Abb. 2

(1) $$p = p' + k$$
$$p'^2 = M^2 \,,\quad p^2 = W^2 \,,\quad k^2 = -\lambda^2 < 0 \,.$$

Nun können wir das Matrixelement des Stromoperators in der Form schreiben[1]:

(2) $$\langle p's' | j_\mu(0) | ps \rangle = e \frac{\bar{u}(p's')}{(p_0'/M)^{1/2}} \Gamma_\mu(p,p') \frac{u(ps)}{(p_0/M)^{1/2}} \,,$$

wobei u(ps) der Spinor für das Nukleon vom Impuls p und Spins ist. $\Gamma_\mu(p,p')$ hängt mit dem irreduziblen Vertex $V_\mu(p,p')$ über die Relation

(3) $$\bar{u}(p's') \Gamma_\mu(p,p') = \bar{u}(p's') V_\mu(p,p') S_{Fc}(p) S_F^{-1}(p)$$

zusammen, mit

$$S_F(p) = \Lambda_+(W)\frac{1}{M-W} + \Lambda_-(W)\frac{1}{M+W}$$

und

(4) $S_{FC}(p) = \Lambda_+(W)\frac{Z^{-1}(W)}{M-W} + \Lambda_-(W)\frac{Z^{-1}(-W)}{M+W}$ (vollständiger renormierter Propagator!),

wobei $\Lambda_\pm(W)$ die Projektionsoperatoren positiver bzw. negativer Energie sind: $\Lambda_\pm(W) = (\not{p} - M)/2W$. Wenn das Nukleon reell wird, geht $Z(W) \to 1$ über und in (3): $V_\mu = \Gamma_\mu$
Bei dieser Gelegenheit stellen wir den Zusammenhang der Größe Z(w) mit der Renormierungskonstanten Z_2 der Quantenelektrodynamik her. Es ist nämlich:

$$\lim_{|W|\to\infty} Z(W) = Z_2 \qquad (0 \le Z_2 \le 1) \ .$$

Aus (3) und (4) folgt daher:

$$\lim_{|W|\to\infty} V_\mu(p,p') = \lim_{|W|\to\infty} \Gamma_\mu(p,p')\, Z_2 \ .$$

Auf der anderen Seite weiß man[2], daß $V_\mu \to 0$ für $|W|\to\infty$ gelten muß, wenn die Unitaritätsrelation erfüllt werden soll. Ein entsprechender Schluß für den hier behandelten uneigentlichen Vertex $\Gamma_\mu(p,p')$ ist aber nur dann zulässig, wenn $Z_2 \neq 0$.

Die allgemeinste Form für den elektromagnetischen Strom mit der Kinematik in (1) ist (aufgrund der Lorentzinvarianz):

(5) $$\bar{u}(p's')\Gamma_\mu(p,p') = \bar{u}(p's')\Big\{\Big[i\gamma_\mu F_1(W,\lambda^2) + i\varepsilon_{\mu\nu}k_\nu \frac{F_2(W,\lambda^2)}{M+W} + k_\mu F_3(W,\lambda^2)\Big]\Lambda_+(W) +$$
$$+\Big[i\gamma_\mu F_1(-W,\lambda^2) + i\varepsilon_{\mu\nu}k_\nu \frac{F_2(-W,\lambda^2)}{M-W} + k_\mu F_3(-W,\lambda^2)\Big]\Lambda_-(W)\Big\} .$$

Dabei sind $F_i(W,\lambda^2)$ die Formfaktoren, die wir im weiteren untersuchen wollen. Die Zahl der invarianten Größen F_i kann weiter reduziert werden, wenn man in (5) Eichinvarianz (d.h. Stromerhaltung) verlangt. Hier muß man diese Forderung in der Form der verallgemeinerten Ward-Identität[3] stellen:

$$(p_\mu - p'_\mu)\,\bar{u}(p's')\,V_\mu(p,p') = \bar{u}(p's')\left[S_{Fc}^{-1}(p) - S_{Fc}^{-1}(p')\right] = \bar{u}(p's')\,S_{Fc}^{-1}(p)$$

d.h. wegen (3)

$$\bar{u}(p's')\,\Gamma_\mu(p,p')\,k_\mu = \bar{u}(p's')\,S_F^{-1}(p) = \bar{u}(p's')\left[\Lambda_+(W)(M-W) + \Lambda_-(W)(M+W)\right],$$

woraus sich

$$(6)\qquad F_1(\pm W,\lambda^2) = 1 + \frac{\lambda^2}{\pm W - M}\,F_3(\pm W,\lambda^2)$$

ergibt. Wir haben daher nur 2 invariante Größen F_i im Ausdruck (5) für den elektromagnetischen Nukleonvertex. Unter Berücksichtigung der Raum- und Zeitinvarianz der Theorie kann man weiter die Relation

$$(7)\qquad F_3(M,\lambda^2) = 0$$

ableiten.

Die hier eingeführten Formfaktoren $F_i(W,\lambda^2)$ gehen in die üblichen elektromagnetischen Formfaktoren $F_i(\lambda^2)$ über, wenn W = M gesetzt wird. Wir haben dann (wegen (6) und (7))

$$(8)\qquad F_1(\lambda^2) \equiv 1 + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial W} F_3(W,\lambda^2)\Big|_{W=M}$$

$$F_2(\lambda^2) \equiv F_2(W=M,\lambda^2)\quad .$$

Die Formfaktoren $F_i(W,\Delta^2)$ sind in (5) als skalare Koeffizientenin einer Lorentz-invarianten Darstellung des Vertex definiert worden. Nun kann man umgekehrt die Formfaktoren aus dem Vertex $\Gamma_\mu(pp')$ herausprojizieren, indem man die Projekionsoperatoren $V_\mu^{(i)}(W,\Delta^2)\,;\, i=1,2,3$ benützt:

$$(9)\qquad F_i(W,\Delta^2) = Sp\left\{\Lambda_+(W)\,\Gamma_\mu\, V_\mu^{(i)}(W,\Delta^2)\right\}\quad ;\, i=1,2,3\,.$$

Wegen (6) braucht man nur 2 Formfaktoren und dementsprechend nur 2 Projektionsoperatoren $V_\mu^{(i)}$ anzugeben. Es ist[1]:

$$(9a)\qquad V_\mu^{(2)}(\pm W,\Delta^2) = \mp\Lambda_\pm(W)\,2W\,A^{-1}(\pm W,\Delta^2)(M\pm W)\Big\{3(M\pm W)\Delta^2 i\gamma_\mu + \big((W\pm M)^2 - 2\Delta^2\big)i\sigma_{\mu\nu}k_\nu + 3(W^2-M^2)k_\mu\Big\}$$

$$V_\mu^{(3)}(\pm W,\Delta^2) = \mp\Lambda_\pm(W)\,2W\,A^{-1}(\pm W,\Delta^2)\Big\{(M\mp W)\big(2(M\pm W)^2-\Delta^2\big)i\gamma_\mu + 3(W^2-M^2)i\sigma_{\mu\nu}k_\nu + \big(4(W^2+M^2)+(M\mp W)^2+2\Delta^2\big)k_\mu\Big\}$$

mit

$$(9b)\qquad A(\pm W,\Delta^2) = \frac{2}{M}\left[(W^2-M^2)^2 + 2\Delta^2(W^2+M^2)+\Delta^4\right]\left[(M\pm W)^2+\Delta^2\right]$$

Mit den in (9a) ablesbaren Abkürzungen $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}$ ist also:

$$(9c)\qquad V_\mu^{(2)}(\pm W,\Delta^2) = \mp\Lambda_\pm(W)\left[a^{(2)}i\gamma_\mu + b^{(2)}i\sigma_{\mu\nu}k_\nu + c^{(2)}k_\mu\right]$$

$$V_\mu^{(3)}(\pm W,\Delta^2) = \mp\Lambda_\pm(W)\left[a^{(3)}i\gamma_\mu + b^{(3)}i\sigma_{\mu\nu}k_\nu + c^{(3)}k_\mu\right]\,.$$

2. Dispersionsrelationen für die Formfaktoren

Die Grundlage für die spätere Berechnung der Formfaktoren $F_i(W,\lambda^2)$ sind die Dispersionsrelationen für diese Funktionen. Um solche Dispersionsrelationen aufstellen zu können, brauchen wir Informationen über die analytischen Eigenschaften dieser Größen in W und/oder in λ^2. Halten wir W fest (und zwar $W^2 < 0$), so kann man[4] zeigen, daß $F_i(W,\lambda^2)$ analytisch in der abgeschlossenen oberen λ^2-Ebene sind - außer einem Schnitt in der negativen reellen Achse λ^2, für $-\lambda^2 \geq 4m_\pi^2$. Die so begründeten Dispersionsrelationen in λ^2 weisen gewisse Nachteile auf. Zunächst sind sie, wie erwähnt, nur für $W^2 < 0$ bewiesen worden. Die Fortsetzung auf den physikalischen Wert $W^2 = M^2$ ist bisher nicht möglich gewesen. Wenn man davon absieht und das Dispersionsintegral mit $W^2=M^2$ berechnen will, benötigt man in 1. Näherung die Amplitude $\pi\pi \to N\bar{N}$ im unphysikalischen Bereich, d.h. unterhalb der physikalischen Schwelle $4M^2$. Darüber hinaus kann man auf Grund dieser Dispersionsrelationen nur den Isovektor-Teil der Nukleonenstruktur in einfacher Weise untersuchen. Denn im Rahmen des Vektordominanz-Modells, das dabei im allgemeinen benützt wird, kann man zunächst nur das ϱ-Meson (Isospin 1) gut behandeln. Aber selbst mit dieser Einschränkung reicht dieses Modell nicht aus, um den experimentellen Verlauf der Formfaktoren wiederzugeben.

Der alternative Weg, d.h. Dispersionsrelationen in W, ist leichter zu verfolgen. Diese Dispersionsrelationen sind für $\lambda^2 \geq 0$ bewiesen worden[1], und in 1. Näherung treten im Dispersionsintegral Amplituden ein, deren Argumente im physikalischen Bereich für die entsprechenden Prozesse liegen. Da im Falle der Dispersionsrelationen in W die Photonmasse $-\lambda^2$ nur als ein Parameter erscheint, ist die Aufspaltung des Photons in einen Isoskalar- und einen Isovektor-Teil nicht mehr relevant. Sie lassen sich beide in gleicher Weise behandeln.

In dieser Arbeit wollen wir ausschließlich Dispersionsrelationen in W verwenden. Ein weiteres Problem in der Dispersionstheorie ist die Frage der Subtraktionen, die wiederum mit dem asymptotischen Verhalten der Größen $F_i(W,\lambda^2)$ zusammenhängt.

Außer den Aussagen aus der Störungstheorie haben wir keine diesbezüglichen Informationen. Die Ward-Identität hat jedoch zur Relation (6) geführt, die aussagt, daß der Ladungs-Formfaktor $F_1(W,\lambda^2)$ einer Dispersionsrelation mit mindestens einer Subtraktion genügen soll, da in (6) eine additive Konstante 1 auftritt. Dies entspricht dem Umstand, daß für reelle Photonen $(\lambda^2=0)$ der absorptive Teil von $F_1(W,\lambda^2)$ verschwinden muß, so daß die elektrische Ladung als Subtraktionskonstante in die Theorie eingeht[6]. Wir sehen also, daß sowohl die elektrische Ladung als auch das normale magnetische Moment der Dirac-Theorie in unserer Theorie nicht bestimmt werden können, sondern als Parameter eingeführt werden müssen. Nur das anomale magnetische Moment und die Formfaktoren können berechnet werden.

Für den Formfaktor $F_2(W,\lambda^2)$ postulieren wir eine Dispersionsrelation ohne Subtraktionen. Für den Formfaktor $F_1(W,\lambda^2)$ schreiben wir eine einmal subtrahierte Dispersionsrelation. Beides sind Annahmen wie auch die Entscheidung, die Subtraktion für $F_1(W,\lambda^2)$ bei $W = \infty$ vorzunehmen und nicht etwa bei $W = M$[5]. Im letzteren Falle wäre die Subtraktion λ^2-abhängig. Somit haben wir unsere Dispersionsrelationen:

(10a) $$F_1(W,\lambda^2) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{M+m_\pi}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{Im}\, F_1(W',\lambda^2)}{W'-W} + \frac{\mathrm{Im}\, F_1(-W',\lambda^2)}{W'+W} \right] dW'$$

(10b) $$\bar{F}_2(W,\lambda^2) = \frac{1}{\pi} P \int_{M+m_\pi}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{Im}\, \bar{F}_2(W',\lambda^2)}{W'-W} + \frac{\mathrm{Im}\, \bar{F}_2(-W',\lambda^2)}{W'+W} \right] dW'$$

mit

(11) $$\bar{F}_2(W,\lambda^2) \equiv \frac{F_2(W,\lambda^2)}{W+M}$$

Zum Schluß erwähnen wir die Möglichkeit, für die Formfaktoren eine Doppelspektraldarstellung hinzuschreiben. Ein exakter Beweis für solch eine Darstellung wäre vom selben Schwierigkeitsgrad wie der Beweis der Mandelstam-Darstellung für die Streuamplituden. Auch eine praktische Handhabung wäre kompliziert, denn es wäre die Kenntnis von Prozessen wie $\pi^- + p \to n + e^+ + e^-$ erforderlich, die im Moment nicht durchführbar sind. Diese Darstellung böte jedoch die Möglichkeit, den Formfaktor auch im zeitartigen Bereich ($\lambda^2 < 0$) zu untersuchen.

3. Anwendungen

In diesem Paragraphen wollen wir die Anwendungsmöglichkeiten der in § 1 eingeführten Formfaktoren untersuchen und zugleich deren physikalischen Inhalt klarstellen.

a) Elektromagnetische Struktur des Nukleons

Die Größen $F_1(W,\lambda^2)$ bzw. $F_2(W,\lambda^2)$ beschreiben die Virtualitätskorrekturen der physikalischen Werte $F_1(M,0)$ bzw. $F_2(M,0)$, wenn ein Nukleon und das Photon außerhalb der entsprechenden Massenschalen liegen. $e F_1(M,0)$ ist die physikalische Elementarladung und $e F_2(M,0)/2M$ ist das anomale magnetische Moment des Nukleons. Während, wie gesagt, $F_1(M,0)$ identisch 1 ist, kann man $F_2(M,0)$ berechnen[5] und mit dem experimentellen Wert vergleichen. Weiter kann man den magnetischen[6] und Ladungsradius[7] des Nukleons bestimmen, wenn diese Größen wie folgt definiert werden:

$$\langle r^2 \rangle_{Lad} = \frac{6}{F_1(M,0)} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} F_1(M,\lambda^2)\Big|_{\lambda^2=0} = 6 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} F_1(M,\lambda^2)\Big|_{\lambda^2=0} \tag{12}$$

$$\langle r^2 \rangle_{mag} = \frac{6}{F_2(M,0)} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} F_2(M,\lambda^2)\Big|_{\lambda^2=0} = 6 \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} F_2(M,\lambda^2)\Big|_{\lambda^2=0}$$

In all diesen Fällen ist es von Vorteil, die Photonmasse $-\lambda^2$ als Parameter und nicht als Dispersionsvariable zu behandeln.

Im letzten Teil unserer Arbeit berechnen wir diese Größen numerisch.

b) Formfaktoren $F_i(\lambda^2)$

Wenn wir W = M setzen, haben wir es mit den üblichen Formfaktoren $F_i(M,\lambda^2)$ zu tun, die hinreichend bekannt sind. Die in dieser Arbeit verwendete Methode zur Berechnung des Formfaktors $F_i(W,\lambda^2)$ bringt mit sich, daß im Dispersionsintegral (absorptiven Teil) dieselben Formfaktoren $F_i(M,\lambda^2)$ nochmal auftreten, so daß sich ein lineares Gleichungssystem für die Formfaktoren $F_i(\lambda^2)$ ergibt (vgl. § 9).

$$F_i^{P,N}(\lambda^2) = a_{i1}^{P,N}(\lambda^2)F_1^P(\lambda^2) + a_{i2}^{P,N}(\lambda^2)F_2^P(\lambda^2) + a_{i3}^{P,N}(\lambda^2)F_1^N(\lambda^2) + a_{i4}^{P,N}(\lambda^2)F_2^N(\lambda^2) + c_i^{P,N}F_\pi(\lambda^2);\ i=1,2,$$

wobei F_i^P bzw. F_i^N die Formfaktoren für das Proton bzw. Neutron und F_π der Formfaktor für das π-Meson ist. Da der Pion-Formfaktor nicht gut bekannt ist, ist unsere Methode nicht geeignet für die Berechnung der Formfaktoren $F_i(\lambda^2)$. Man kann jedoch aufgrund des erwähnten Sachverhalts die Zuverlässigkeit unserer Methode und die Güte der hier gemachten Näherungen und Annahmen testen.

Liefert unsere Theorie Ergebnisse mit größerer Genauigkeit als die bisher verwendeten Methoden zur Bestimmung des Pion-Formfaktors, so kann man umgekehrt den Pion-Formfaktoren mittels der Nukleon-Formfaktoren berechnen (§ 10).

c) Formfaktoren $F_i(W,\lambda^2=0)$

Für reelles Photon ($\lambda^2=0$) haben wir wegen (6) nur einen Formfaktor. Hier bieten sich mehrere Anwendungsmöglichkeiten und zwar immer, wenn in einem Prozeß Nukleonen ausgetauscht werden

(vgl. Ausführungen in § 1). Der Effekt der Virtualität der Nukleonen wird gerade durch $F_2(W)$ beschrieben. Man kann z. B. versuchen, die Photonerzeugung von Antiprotonen an leichten Kernen mittels des peripheren Modells [8] zu erklären (Abb. 3a). Speziell kann man den Prozeß $\gamma + N \to \bar{N} + N + N$ (Abb. 3b) mit dem peripheren Nukleonaustausch untersuchen. Wir wollen in dieser Arbeit auf diese Probleme nicht eingehen. Es genügt die Feststellung, daß in dieser Beschreibung von Prozessen Virtualitätskorrekturen für das ausgetauschte Nukleon anzubringen sind. Sie bestehen einmal in den Vertex- und zum anderen in den Propagatorkorrekturen. Nach unserer Diskussion in § 1 (Gl. (3)) enthält der Vertex Γ_μ bzw. der Formfaktor $F_2(W)$ bereits beide Korrekturen. Es bleibt nur der untere Vertex, der ebenfalls eine virtuelle Linie enthält. Meist wird für ihn die entsprechende physikalische Amplitude eingesetzt. Man hat jedoch auch hier versucht [4], die Virtualitätseffekte zu berücksichtigen mit Hilfe des π-N Formfaktors.

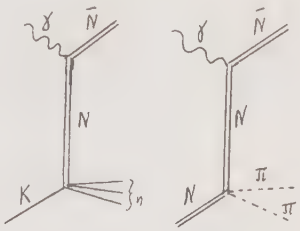

Abb. 3a Abb. 3b

Man beachte, daß in den hier erwähnten Prozessen der Formfaktor für **raumartige** Impulse ($W^2 < 0$) benötigt wird.

Im Hinblick auf die praktischen Anwendungen betonen wir, daß immer, wenn virtuelle Nukleonen ausgetauscht werden, das Matrixelement in zwei Teile aufgespalten werden muß, die proportional Λ_+ und Λ_- sind - entsprechend (4) oder (5). Der k_μ -Term in (5) spielt dabei keine Rolle, denn ein physikalisches Matrixelement, das ein reelles Photon enthält, wird vom Polarisationsvektor ϵ_μ begleitet, und wegen der Eichinvarianz ist immer $\epsilon_\mu k_\mu = 0$.

Zur Illustration bilden wir das Matrixelement für die Abb. 1, die hier den Nukleonaustausch in der Photonproduktion von einem π -Meson darstellen soll. Wenn wir von der Isospinstruktur absehen, ist:

$$M = g\left(\frac{M^2}{2q_1 p_1 p_2}\right)^{1/2} \epsilon_\mu\, \bar{u}(p_2)\gamma_5 \left(\bar{K}(W)\Lambda_+(W) + \bar{K}(-W)\Lambda_-(W)\right) \frac{1}{\not p - M} \times$$

$$\times \left\{ \left[i\gamma_\mu F_1(W) + i\sigma_{\mu\nu} k_\nu \frac{F_2(W)}{W+M}\right]\Lambda_+(W) + \left[i\gamma_\mu F_1(-W) + i\sigma_{\mu\nu} k_\nu \frac{F_2(-W)}{M-W}\right]\Lambda_-(W)\right\}$$

(13)

$$= g\left(\frac{M^2}{2q_2 p_1 p_2}\right) \bar{u}(p_2)\gamma_5 \epsilon_\mu \Big[\bar{K}(W)\left(F_1(W) i\gamma_\mu + \frac{F_2(W)}{W+M} i\sigma_{\mu\nu} k_\nu\right)\Lambda_+(W) +$$

$$+ \bar{K}(-W)\left(F_1(-W) i\gamma_\mu + \frac{F_2(-W)}{M-W} i\sigma_{\mu\nu} k_\nu\right)\Lambda_-(W)\Big] u(p_1) .$$

$\bar{K}(\pm W)$ ist dabei der Formfaktor für den irreduziblen π-N-Vertex, der über

(13') $$\bar{K}(\pm W) = Z(\pm W) K(\pm W)$$

mit dem π-N-Formfaktor $K(\pm W)$ zusammenhängt, den wir im nächsten Teil behandeln wollen. Die Größe $Z(\pm W)$ wird in (9) behandelt (bei Selleri ist $H_\pm(W) = Z_\pm^{-1}(W)$!).

II. DER ABSORPTIVE TEIL DES ELEKTROMAGNETISCHEN FORMFAKTORS

4. Allgemeiner Ausdruck und 1. Näherung

In § 1 haben wir die Formfaktoren $F_i(W,\lambda^2)$ durch (9) aus dem Vertex Γ_μ herausprojiziert. Nun kann man Γ_μ mittels des Reduktionsformalismus[10] als das Matrixelement eines Kommutators schreiben[1].

$$(14)\quad \bar{u}(p's')\Gamma_\mu = \frac{1}{e}\left(P_0'/M\right)^{1/2} i\int d^4x\, e^{-ipx}\,\vartheta(-x_0)\,\langle p's'|\left[j_\mu(0),\bar{\eta}(x)\right]|0\rangle .$$

Wenn wir den absorptiven Teil des Formfaktors bilden wollen, so haben wir im Grunde den absorptiven Teil von (14) zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man $i\,\vartheta(-x_0)$ durch $\frac{1}{2}$ ersetzt. In (14) haben wir den Feldoperator $\bar{\eta}(x) = \left(-\gamma_\mu^T i\frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\bar{\psi}(x)$ eingeführt, wobei $\bar{\psi}(x)$ der Feldoperator für das Nukleon ist. In (14) schieben wir einen vollständigen Satz von einlaufenden Zuständen mit der Masse M_n ein, führen die oben erwähnte Substitution durch und bemerken, daß gilt[10]

$$\langle \text{ein Nukleon}|\bar{\eta}(0)|0\rangle = 0$$

Es ergibt sich dann

$$\bar{u}(p's')\,\mathrm{Abs}\,\Gamma_\mu = \frac{1}{e}\left(P_0'/M\right)^{1/2}\pi\sum_{|n\rangle}\lambda p_0\,\vartheta(p_0)\,\delta(W'-M_n)^2\,\langle p's'|j_\mu(0)|n\rangle\times$$
$$\times\langle n|\bar{\eta}(0)|0\rangle .$$

Man entnimmt dieser Gleichung, daß die Zwischenzustände $|n\rangle$ die Baryonenzahl 1 und Spin sowie Isospin $\frac{1}{2}$ haben müssen. Es sind also Zustände, die ein Nukleon und eine Anzahl von π-Mesonen oder Baryon-Anti-Baryonen-Paaren oder K-$\bar{\text{K}}$-Paaren enthalten. Der leichteste Zustand, der in Frage kommt, ist der 1 Nukleon-1 Pion-Zustand. Dies ist die 1. Näherung für den absorptiven Teil des elektromagnetischen Formfaktors, die wir im weiteren zugrundelegen werden: Es ist also

$$|n\rangle = |p'',q\rangle_{1n}$$

mit

$$p'' + q = p$$

$$p''^2 = M^2 \quad , \quad q^2 = m_\pi^2 \quad .$$

Der absorptive Teil der Formfaktoren wird daher in 1. Näherung durch die Relation

(15)
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, F_i(w,\lambda') = \frac{1}{e} \sum_{s''=1}^{2} (p_0'/M)^{1/2} \pi \sum_r \int d^4p'' d^4q\, (2\pi)^{-3} (2p_0'')(2q_0)\, \delta(p''^2) \delta(q^2) \times \\ \times \delta(p''^2 - M^2)\, \delta(q^2 - m_\pi^2)\, \delta(p'' + q - p) \langle p''s'' | j_\mu^{(i)}(0) | p''q \rangle_{in,in} \langle p''q | \bar{\eta}^{(0)}(0) | 0 \rangle \times \\ \times V_\mu^{(i)} u(p's') \end{aligned}$$

gegeben. Die Summation über r bezieht sich auf die diskreten Quantenzahlen (Spin, Isospin) des π-N-Zustandes (p'', q).

5. Explizite Form in 1. Näherung

Wir wollen nun beide Matrixelemente in (15) einzeln untersuchen. Der Ausdruck $\langle p''q | \bar{\eta}^{(0)}(0) | 0 \rangle_{in}$ hängt mit dem π-N-Vertex zusammen. Wir können schreiben[1), 9)]

$$\langle 0 | \eta^{(0)}(0) | p''s'', q\lambda \rangle_{in} = -ig\, \tau_\beta\, e_\beta(\lambda)\, \Gamma\, u(p''s') \left(\frac{M}{p_0'' q_0} \right)^{1/2}$$

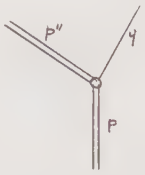

Abb. 4

wobei s'' bzw. λ den Spin und Isospin des Nukleons p'' bzw. den Isospin des Pions q beschreibt. $e_\beta(\lambda)$ ist ein Einheitsvektor im Isospinraum und τ_β die Pauli-Matrix im Isospinraum. g ist die renormierte und rationalisierte π-N-Kopplungskonstante, mit $g^2/4\pi = 15$. Aus Invarianzgründen kann man den π-N-Vertex in der Form schreiben

$$\Gamma u(p''s'') = \left[\Lambda_+(w) K(w) + \Lambda_-(w) K(-w) \right] \gamma_5\, u(p''s'') \quad ,$$

mit $K(W)$ als dem π-N-Formfaktor. $K(W)$ wird bei W = M auf 1 normiert:

$$K(M) = 1 \quad .$$

Wir haben also insgesamt:

(16)
$$\langle p'', q | \bar{\eta}(0) | U \rangle = -ig \left(\frac{M}{p_3'' 2q_0} \right)^{1/2} e_\varrho^*(\lambda)\, \bar{u}(p''s'')\, \tau_\varrho \gamma_5 \times$$
$$\times \left[\Lambda_+(W) K^*(W) + \Lambda_-(W) K^*(-W) \right] .$$

Das Matrixelement $\langle p's' | j_\mu(0) | p'', q \rangle_{cm}$ stellt den elektromagnetischen Nukleonenstrom und bezieht sich auf die Photo- ($\lambda^2 = 0$) bzw. Elektroproduktion ($\lambda^2 > 0$) von einem π-Meson an Nukleonen. Wegen der Stromerhaltung

(17)
$$k_\mu j_\mu = 0$$

liefert der k_μ-proportionale Term in $V_\mu^{(i)}$ (vgl. Gl. (9)) keinen Beitrag zum Ausdruck (15), und wir vernachlässigen ihn im weiteren.
Wir können nun schreiben:

(18)
$$\langle p's' | j_\mu(0) | p''s'', q \lambda \rangle_{cm} = \left(\frac{M^2}{p_3'' p_3' 2q_0} \right)^{1/2} \bar{u}(p's')\, H_\mu\, u(p''s'')\, e_\varrho(\lambda)$$

Wenn wir in (16) bzw. (18) eine Drehimpulsentwicklung vornehmen, und das Watson[11]-Theorem benützen wollen, brauchen wir Zustände definierter Parität. Dazu ist es erforderlich, in das Schwerpunktsystem der Photo- bzw. Elektroproduktion überzugehen.

Die Schwerpunktkoordinaten lauten[+)]

[+)] Ab dieser Stelle setzen wir $m_\pi = 1$ und drücken dementsprechend alle Energiegrößen in Einheiten der Pionmasse aus.

$$p = (W, 0) \quad , \quad p' = (E_1, \vec{p}_1) \quad , \quad p'' = (E_2, \vec{p}_2)$$

$$k = (k_0, \vec{k}) \quad , \quad q = (q_0, \vec{q})$$

(19) $$\vec{p}_2 + \vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{q} = 0 \quad ; \quad \cos\vartheta \equiv x = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{kq}$$

$$|\vec{p}_1|^2 = |\vec{k}|^2 \equiv k^2 = (E_1^2 - M^2)$$

$$|\vec{p}_2|^2 = |\vec{q}|^2 \equiv q^2 = (E_2^2 - M^2)$$

$$E_1 = \frac{W^2 + M^2 + \lambda^2}{2W} \quad , \quad E_2 = \frac{W^2 + M^2 - 1}{2W}$$

$$k_0 = \frac{W^2 - M^2 - \lambda^2}{2W} \quad , \quad q_0 = \frac{W^2 - M^2 + 1}{2W} \quad .$$

Im Schwerpunktsystem braucht man das Matrixelement (18) nur zwischen den zweikomponentigen Pauli-Spinoren auszudrücken. Es ist mit $S^\mu = (S^0, \vec{S})$:

(20) $$\bar{u}(p's')\, H_\mu\, u(p''s'') = 4\pi \frac{W}{M}\, \chi^*(s')\, S^\mu \chi(s'')$$

Die allgemeinste Form für S^μ ist[12]:

(21) $$\vec{S} = i\vec{\sigma} F_1 + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,(\vec{\sigma}\times\vec{k})}{kq} F_2 + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\,\vec{q}}{kq} F_3 + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,\vec{q}}{q^2} F_4 + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\,\vec{k}}{k^2} F_5 + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,\vec{k}}{kq} F_6$$

$$S^0 = i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{k} F_7 + i\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{q} F_8 \quad .$$

Die Funktionen $F_1 \ldots F_8$ hängen von den drei Skalaren des Systems ab. Wir wählen als Variable die Größen W, λ^2 und x. Die F_i's sind nicht alle voneinander unabhängig. Wenn man nämlich den Stromerhaltungssatz (17) anwendet:

$$k_\mu J^\mu = 0$$

ergeben sich die Beziehungen:

(22)
$$F_5 = \frac{k_0}{k} F_7 - x F_3 - F_1$$
$$F_6 = \frac{k_0}{k} F_8 - x F_4$$

Man kann daher F_5 und F_6 eliminieren. Dies entspricht der Eliminierung der longitudinalen Photonen im Falle der Elektroproduktion ($\lambda^2 > 0$). Man könnte stattdessen F_7 und F_8 eliminieren, was der Eliminierung der skalaren Photonen gleichkäme. All dies hängt mit der Willkür bei der Wahl einer Eichung zusammen.

Wir wollen noch die Isospinstruktur der Amplituden $F_1 \ldots F_8$ angeben. Sie lautet[13]:

(23)
$$F_i^\beta = \delta_{\beta 3} F_i^{(+)} + \frac{1}{2}\left[\tau_\beta, \tau_3\right] F_i^{(-)} + \tau_\beta F_i^{(0)} \quad ; i = 1, 2 \ldots 8$$

Im Ausdruck (15) ist, wie erwähnt, eine Summation über die Isospins des Pions q enthalten. Wegen (16), (18), (23) und der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_\lambda e_\beta(\lambda) e^*_{\beta'}(\lambda) = \delta_{\beta\beta'}$$

gilt:

(24)
$$\sum_{\beta,\lambda} e_\beta(\lambda) e^*_{\beta'}(\lambda) F_i^\beta \tau_{\beta'} = F_i^{(+)} \tau_3 + 2 F_i^{(-)} \tau_3 + 3 F_i^{(0)}$$
$$= F_i^V \tau_3 + F_i^S \quad ; i = 1, \ldots 8$$

mit

(24')
$$F_i^V = F_i^{(+)} + 2 F_i^{(-)} \quad , \quad F_i^S = 3 F_i^{(0)} \quad , \; i = 1, \ldots 8$$

Gl. (24) drückt den Umstand aus, daß das π-N-System ein Eigenzustand zum Isospin $I = \frac{1}{2}$ ist.

Wir fassen zusammen: In (15) stehen zwei Matrixelemente, die wir durch (16) und (18) ausgedrückt haben. Wir können auch $v_\mu^{(+)}(W,q)$ durch Spinoren ausdrücken, wenn wir die Projektionsoperatoren $\Lambda_\pm(W)$ in (9) durch

$$\Lambda_+(W) = \sum_{s=1}^{2} u(ps)\bar{u}(ps) \quad , \quad \Lambda_-(W) = \sum_{s=1}^{2} v(ps)\bar{v}(ps)$$

ersetzen, in Analogie zum Fall der reellen Nukleonen. Wir haben nämlich angenommen, daß $u(ps)$ bzw. $v(ps)$ der Dirac-Gleichung $(\not{p} - W)\,u(ps) = 0$ bzw. $(\not{p} + W)v = 0$ genügen. Dann schreiben wir für (15), nachdem wir die Summation über die Isospins (vgl. (24)) ausgeführt haben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, F_i(W) = -i\frac{g}{e} \sum_{s,s',s''} \pi \int d^4p''\, d^4q\, (2\pi)^{-3}\, \vartheta(p_0'')\vartheta(q_0)\, \delta(p''^2 - M^2) \cdot \\ \cdot \delta(q^2 - 1)\, \delta(p'' + q - p) \left[\bar{u}(p's')\, H_\mu\, u(p''s'')\right] \cdot \\ \cdot \left[\bar{u}(p''s'')\, \gamma_5\, u(ps)\right] \left[\bar{u}(ps)\, K^*(W)\left(a^i \cdot \gamma_\mu + b^i \cdot \sigma_{\mu\nu} k_\nu\right) u(p's')\right] . \end{aligned} \tag{25}$$

Neben der 1. Klammer müssen jetzt auch die 2. und 3. Klammer durch Pauli-Spinoren ausgedrückt werden. Hierzu bedenken wir, daß es zwei linear unabhängige Lösungen positiver Energie der Dirac-Gleichung gibt, die jeweils zum Spin $\pm \frac{1}{2}$ gehören. Wir können sie in der Form darstellen:

$$u_\pm(p) = \left(\frac{p_0 + M}{2M}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi(\pm) \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p_0 + M}\,\chi(\pm) \end{pmatrix} .$$

Diese Darstellung legen wir auch dem virtuellen Nukleon zugrunde, indem wir M durch seine virtuelle Masse W ersetzen. Unter Berücksichtigung der Schwerpunktvariablen schreiben wir die vierer-Spinoren wie folgt:

$$u(p''s'') = \left(\frac{E_2+M}{2M}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi(s'') \\ -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{q}}{E_2+M}\chi(s'') \end{pmatrix}$$

$$u(ps) = \begin{pmatrix} \chi(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p's') = \left(\frac{E_1+M}{2M}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi(s') \\ -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{E_1+M}\chi(s') \end{pmatrix}$$

Mit der Darstellung:

$$\vec{\gamma} = i\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = -i\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt dann:

$$\bar{u}(p''s'')\,\gamma_5\,u(ps) = -\chi^*(s'')\,\vec{\sigma}\cdot\vec{q}\,\chi(s)\,\frac{1}{\sqrt{2M(E_2+M)}} \tag{26}$$

$$\bar{u}(ps)\left[a^{(i)} i\gamma_\mu + b^{(i)} i\sigma_{\mu\nu}k_\nu\right]u(p's') = -\frac{1}{\sqrt{2M(E_1+M)}} \cdot$$
$$\cdot\,\chi^*(s)\left[\left(-a^{(i)}(E_1+M) + b^{(i)}(E_1+M)(w-M)\right),\ \left(a^{(i)} + (w+M)\,b^{(i)}\right)\vec{\sigma}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right]\chi(s') .$$

Wir führen nun (20) und (26) in (25) ein, führen die elementaren Integrationen aus und beachten, daß gilt:

$$\sum_{s=1}^{2} \chi(s)\chi^*(s) = 1$$

Dann bleibt nur eine Winkelintegration übrig:

$$\mathrm{Im}F_i(w) \sim Sp\int_{-1}^{+1} dx \left(-i\mathcal{S}^0, -i\vec{\mathcal{S}}\right)\vec{\varepsilon}\cdot\vec{q} \cdot$$
$$\cdot\left[\left(-a^{(i)}(E_1+M) + b^{(i)}(E_1+M)(w-M)\right),\ \left(a^{(i)} + (w+M)\,b^{(i)}\right)\vec{\sigma}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right] \equiv I_i .$$

Wenn wir die Werte $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ aus (9c) einsetzen, und F_5 und F_6 mit (22) eliminieren, erhalten wir:

$$I_2(W,\lambda^2) = -\frac{M}{W}\frac{q}{k}\left[M_{1-}(W)(W+M) - \frac{\lambda^2}{k}S_{1-}(W)\right](W+M)$$

$$I_3(W,\lambda^2) = -\frac{M}{W}\frac{q}{k}\left[M_{1-}(W) + \frac{W+M}{k}S_{1-}(W)\right](W-M)$$

Das Endergebnis ist, wenn man noch (6) berücksichtigt:

(27)
$$Im\,F_1(W,\lambda^2) = -\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}\lambda^2\left[M_{1-}(W,\lambda^2) + \frac{W+M}{k}S_{1-}(W,\lambda^2)\right]K^*(W)$$

$$Im\,F_2(W,\lambda^2) = -\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}(W+M)\left[M_{1-}(W,\lambda^2) - \frac{\lambda^2}{k}S_{1-}(W,\lambda^2)\right]K^*(W)$$

Hier haben wir eine Multipolanalyse durchgeführt gemäß[12]:

(27a)
$$M_{1-} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}dx\left[F_1P_1(x) - F_2P_0(x) - F_3\frac{P_0(x)-P_2(x)}{3}\right]$$

$$S_{1-} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}dx\left[F_7P_1(x) + F_8P_0(x)\right] \quad .$$

$P_n(x)$ sind die Legendre-Polynome nter Ordnung und M_{1-} bzw. S_{1-} der magnetische Dipol bzw. skalare Monopol. Diese Multipole sind erwartungsgemäß die einzigen, die emittiert oder absorbiert werden können, ohne den Gesamtdrehimpuls und die Parität des Nukleons zu ändern.

Wenn man die Reflexionseigenschaft

$$M_{1-}(-W) = E_{0+}(W)\ ,\ S_{1-}(-W) = S_{0+}(W)$$

heranzieht[12, 14], findet man

(27')
$$Im\,F_1(-W,\lambda^2) = \frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2+M}{E_1-M}\right)^{1/2}\lambda^2\left[E_{0+}(W,\lambda^2) - \frac{W-M}{k}S_{0+}(W,\lambda^2)\right]K^*(-W)$$

$$Im\,F_2(-W,\lambda^2) = \frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2+M}{E_1-M}\right)^{1/2}(W-M)\left[(W-M)E_{0+}(W,\lambda^2) + \frac{\lambda^2}{k}S_{0+}(W,\lambda^2)\right]K^*(-W)$$

Hier treten der elektrische und der skalare Dipol E_{0+} und S_{0+} ein, die bei Emission oder Absorption den Gesamtdrehimpuls des Nukleons nicht ändern, wohl aber seine Parität[+].

Um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen und gewisse Zusammenhänge zwischen den hier behandelten Größen hervorzuheben, stellen wir folgende Überlegungen an: Im Hinblick auf (10a) spalten wir $Im F_1(W)$ in (27) in zwei Terme auf:

$$Im F_1(W) = Im F_1^1(W) + Im F_1^2(W)$$

so daß gilt:

$$F_1(W) - 1 = F_1^1(W) + F_1^2(W) .$$

Dabei ist:

$$(28) \qquad Im F_1^1(W) = -\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}\lambda^1 M_{1-}(W) K^*(W)$$

$$Im F_1^2(W) = -\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}\frac{\lambda^1}{k}(W+M) S_{1-}(W) K^*(W)$$

Eine analoge Aufspaltung von $\frac{F_2(W)}{W+M}$ bzw. $\frac{Im F_2(W)}{W+M}$ führt zum Ausdruck:

$$F_2(W) = F_2^1(W) + F_2^2(W) ,$$

mit

$$(28') \qquad \frac{Im F_2^1(W)}{W+M} = -\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}(W+M) M_{1-}(W) K^*(W)$$

$$\frac{Im F_2^2(W)}{W+M} = +\frac{g}{e}\frac{1}{W}\frac{q}{k}\left(\frac{E_2-M}{E_1+M}\right)^{1/2}\frac{\lambda^1}{k} S_{1-}(W) K^*(W) .$$

Wenn nun die Dispersionsrelation (10b) gilt, muß auch eine Dispersionsrelation für $F_2^1(W)/(W+M)$ ohne Subtraktionen richtig sein.

[+] Unsere Ergebnisse (27) und (27') weichen vom entsprechenden Resultat von Bincer[1] ab, und zwar tritt in (27) die Photonmasse explizit im Ausdruck für $ImF_1(W, \lambda^1)$ auf. Dies hat zur Folge, daß der absorptive Teil von $F_1(W, \lambda^1)$ für reelle Photonen identisch verschwindet, wie es sein muß (vgl. Diskussion in § 2). Die skalaren bzw. longitudinalen Multipole bleiben jedoch für $\lambda^1 = 0$ endlich.

(man bedenke, daß für $\lambda^2 \to 0$ $\mathrm{Im}\, F_2^2 \to 0$ sein muß, so daß im Fall $\lambda^2 = 0$ die Existenz einer Dispersionsrelation für F_2 äquivalent ist mit der Existenz der D.R. für F_2^1), d. h. das Integral

$$\frac{F_2^1(W,\lambda^2)}{W+M} = -\frac{g}{e}\frac{1}{\pi} P\int_{M+1}^{\infty} dW' \left[\frac{q'}{k'W'}\left(\frac{E_2'-M}{E_1'+M}\right)^{1/2}\frac{(W'+M)M_{1-}(W',\lambda^2)K^2(W')}{W'-W} + \right.$$

$$\left. + \frac{q'}{k'W'}\left(\frac{E_2'+M}{E_1'-M}\right)^{1/2}\frac{(W'-M)E_{0+}(W',\lambda^2)K^2(-W)}{W'+W}\right] \equiv X_1(W,\lambda^2) \tag{29}$$

muß existieren. Dann existiert aber auch eine Dispersionsrelation für die Größe $(W+M)F_1^1(W,\lambda^2)$, und es gilt:

$$F_1^1(W,\lambda^2) = \frac{\lambda^2}{W+M} X_1(W,\lambda^2) \tag{30}$$

Ganz analog kann man aus der Existenz des Integrals

$$F_1^2(W)/\lambda^2 = -\frac{g}{e}\frac{1}{\pi} P\int_{M+1}^{\infty} dW' \left[\frac{q'}{k'W'}\left(\frac{E_2'-M}{E_1'+M}\right)^{1/2}\frac{(W'+M)S_{1-}(W',\lambda^2)K^2(W)}{k'(W'-W)} + \right.$$

$$\left. + \frac{q'}{k'W'}\left(\frac{E_2'+M}{E_1'-M}\right)^{1/2}\frac{(W'-M)S_{0+}(W',\lambda^2)K^2(-W)}{k'(W'+W)}\right] \equiv X_2(W,\lambda^2) \tag{31}$$

auf eine Dispersionsrelation für

$$F_2^2(W,\lambda^2) = -\lambda^2 X_2(W,\lambda^2) \tag{32}$$

schließen.

Somit braucht man nur die Integrale $X_1(W,\lambda^2)$ und $X_2(W,\lambda^2)$ aus (29) und (30) zu berechnen. Durch sie lassen sich die Formfaktoren wie folgt ausdrücken:

$$F_1(W,\lambda^2) = 1 + \frac{\lambda^2}{W+M} X_1(W,\lambda^2) + \lambda^2 X_2(W,\lambda^2) \tag{33}$$

$$F_2(W,\lambda^2) = (W+M) X_1(W,\lambda^2) - \lambda^2 X_2(W,\lambda^2) \quad .$$

Zugleich kann man die F_1^K aufeinander wie folgt beziehen:

$$F_1^1 = \left[\lambda^1/(W+M)\right] F_2^1$$
$$F_1^2 = -F_2^2 \quad ,$$

woraus sich die Zweckmäßigkeit der Benützung der Sachs'schen Formfaktoren (allerdings in etwas abgeänderter Form):

$$G_M(W,\lambda^1) \equiv \tfrac{1}{2}\left[F_1(W,\lambda^1) + F_2(W,\lambda^1)\right] = \tfrac{1}{2}\left[1 + (W+M)\left(1+\frac{\lambda^2}{(W+M)^2}\right) X_1(W,\lambda^1)\right]$$
(34)
$$G_E(W,\lambda^1) \equiv \tfrac{1}{2}\left[F_1(W,\lambda^1) - \frac{\lambda^2}{(W+M)^2} F_2(W,\lambda^1)\right] = \tfrac{1}{2}\left[1 + \lambda^1\left(1+\frac{\lambda^2}{(W+M)^2}\right) X_2(W,\lambda^1)\right]$$

erkennen läßt.

In (24) haben wir die Isospin-Abhängigkeit der Elektroproduktionsamplituden $F_1..F_8$ bestimmt. Dieselbe Isospinstruktur überträgt sich auf die Multipole $M_{l-}, E_{o+}, S_{l-}, S_{o+}$ und über sie auf die Formfaktoren F_1 und F_2 bzw. G_M und G_E. In (29), (31), (33) und (34) ist beispielsweise (vgl.(24')):

$$M_{l-} \to M_{l-}^V \tau_3 + M_{l-}^S \quad , \quad X_l \to X_l^V \tau_3 + X_l^S$$

und

$$F_1 \to F_1^V \tau_3 + F_1^S$$
$$G_M \to G_M^V \tau_3 + G_M^S \quad .$$

Es ist daher

$$F_1^{p,n}(W,\lambda^1) = \binom{1}{0} + \frac{\lambda^2}{W+M}\,\frac{X_1^S \pm X_1^V}{2} + \lambda^2\,\frac{X_2^S \pm X_2^V}{2} \equiv \binom{1}{0} + \frac{\lambda^2}{W+M} X_1^{p,n} + X_2^{p,n}$$
(35)
$$F_2^{p,n}(W,\lambda^1) = (W+M) X_1^{p,n} - \lambda^2 X_2^{p,n} \quad ,$$

$$G_M^{p,n}(W,\lambda^1) = \binom{1}{0} + (W+M)\left(1+\frac{\lambda^2}{(W+M)^2}\right) X_1^{p,n}$$
(36)
$$G_E^{p,n}(W,\lambda^1) = \binom{1}{0} + \lambda^1\left(1+\frac{\lambda^2}{(W+M)^2}\right) X_2^{p,n} \quad .$$

Hier haben wir die Größen definiert (symbolisch):

$$(37)\qquad X_1^{p_N} \longrightarrow X_1 \left\{ \tfrac{1}{2}\left(3M_{1-}^{(0)} \pm \left(2M_{1-}^{(-)} + M_{1-}^{(+)}\right)\right),\ \tfrac{1}{2}\left(3E_{0+}^{(0)} \pm \left(2E_{0+}^{(-)} + E_{0+}^{(+)}\right)\right)\right\}$$

$$X_2^{p_N} \longrightarrow X_2 \left\{ \tfrac{1}{2}\left(3M_{1-}^{(0)} \pm \left(2M_{1-}^{(-)} + M_{1-}^{(+)}\right)\right),\ \tfrac{1}{2}\left(3E_{0+}^{(0)} \pm \left(2E_{0+}^{(-)} + E_{0+}^{(+)}\right)\right)\right\}$$

Die Normierung der Formfaktoren wurde folgendermaßen festgelegt[15]:

$$(38)\qquad F_1^{S,V}(M,0) = 1\ ,\quad F_2^{S,V}(M,0) = \mu_p' \pm \mu_N$$

$$G_M^{S,V}(M,0) = \tfrac{1}{2}(\mu_p \pm \mu_N)\ ,\quad G_E^{S,V}(M,0) = \tfrac{1}{2}$$

mit

μ_p' = 1.79 (anomales magnetisches Moment des Protons)

μ_p = 2.79 (totales magnetisches Moment des Protons)

μ_N = -1.91 (magnetisches Moment des Neutrons).

In der weiteren Untersuchung werden wir hauptsächlich die Formfaktoren F_1 und G_M benützen, die für die Rechnungen zweckmäßiger sind.

III. BERECHNUNG DES ABSORPTIVEN TEILS DER ELEKTROMAGNETISCHEN FORMFAKTOREN

6. Die Güte der π-N-Näherung und inelastische Effekte

Bei der Ableitung der Ausdrücke (27) und (27') für den absorptiven Teil der Formfaktoren haben wir uns auf den niedrigsten Zwischenzustand im Kanal mit Drehimpuls $J = \frac{1}{2}$ beschränkt, nämlich das π-N-System. Das ist bei einer dispersionstheoretischen Behandlung üblich, denn die höheren Zustände liefern aus kinematischen Gründen geringere Beiträge. Auch aus praktischen Gründen wäre aber die Berücksichtigung etwa des nächsten Zwischenzustandes (π-π-N) schon sehr umständlich und fragwürdig.

Wir haben uns daher vorgenommen, einerseits bei dieser Näherung zu bleiben, auf der anderen Seite aber die hier eingehenden Größen $M_{1-}(W)$, $E_{0+}(W)$ u.s.w. sowie $K(\pm W)$ möglichst exakt zu berechnen.

Die Dispersionsrelationen wurden bisher hauptsächlich[5, 6, 7] benützt, um die elektromagnetische Struktur des Nukleons zu untersuchen (vgl. § 3a). In diesem Zusammenhang ist es konsistent, nur das Schwellenverhalten des absorptiven Teils in Betracht zu ziehen, da die Formfaktoren für $W \approx M$ ausgewertet werden. So kann man von den Niederenergie-Theoremen für die Photo- bzw. für die Elektroproduktion (Kroll-Rudermann-Theorem bzw. PCAC-Hypothese und Stromalgebra) ausgehen, die im wesentlichen auf die störungstheoretische Analyse dieser Produktionsprozesse bzw. Pol-Dominanz hinauslaufen. In dieser Behandlung wird $K(W) = K(-W) = 1$ gesetzt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Produktionsamplituden durch möglicherweise im Kanal ($J = \frac{1}{2}$, $I = \frac{1}{2}$) auftretende Resonanzen auszudrücken.[16]

Wir wollen in unserer Arbeit diese Möglichkeiten außer acht lassen. Denn wir werden einerseits die virtuellen Formfaktoren $F_1(W)$ berechnen, so daß wir mit der Schwellendominaz bestimmt nicht auskommen können. Zum andern aber ist die Rolle der P_{11}-Resonanz (Roper-Resonanz) sowie der S_{11}-Resonanz für die Elektro- und Photoproduktion umstritten[17].

Aus diesen Gründen haben wir es vorgezogen, folgendermaßen vorzugehen:

Wie wir in den nächsten Paragraphen sehen werden, ist zur Bestimmung des π-N-Formfaktors und der Elektroproduktionsamplitude $M(W)$ [+)] die Kenntnis der Phase dieser Größen auf dem Unitaritätsschnitt ($M+1, \infty$) erforderlich, und dort gilt:

$$\text{Im } K(\pm W) = h^*(W) K(\pm W) \tag{39}$$

$$\text{Im } M(W) = h(W) M(W)$$

wobei

$$h(W) = e^{i\delta(W)} \sin\delta(W) \tag{40}$$

ist und $\delta_p(W) \equiv \delta(W)$ die Phase für die π-N-Streuung der P-Welle im $(J=\frac{1}{2}, I=\frac{1}{2})$-Kanal. Entsprechend ist $\delta_s(W) \equiv \delta(-W)$ die Phase der S-Welle im selben Kanal. Die Relationen (39) drücken das Watson[11)]-Theorem aus und gelten strenggenommen nur im elastischen Bereich, d. h. von M + 1 bis M + 2. Man kann jedoch die Gültigkeit von (39) über die erste Produktionsschwelle M + 2 hinaus annehmen, wenn die entsprechenden Produktionsprozesse (inelastische Effekte) nicht so stark ins Gewicht fallen. Dies ist der Fall, wenn die Phase $\delta(W)$ für den weiteren Bereich im wesentlichen reell bleibt. Wenn dagegen die inelastischen Effekte stark werden, wofür als Maß die Inelastizität

$$\eta(W) = \exp\left(-2\,\text{Im}\,\delta(W)\right) ; \; 0 \leq \eta \leq 1 \tag{41}$$

eingeführt wird (man beachte, daß die inelastischen Effekte für $\eta = 1$ verschwinden und für $\eta = 0$ am größten sind), darf man (39) nicht in dieser Form benützen.

Nun sind die inelastischen Effekte im S_{11}- und besonders im P_{11}-Kanal der π-N-Streuung sehr stark. Die Inelastizität η im P_{11}-Kanal etwa nimmt vom Wert 1 bei 300 MeV (π -Laborenergie)

+) $M(W)$ steht stellvertretend für $M_{1-}(W)$, $E_{0+}(W)$, $S_{1-}(W)$, $S_{0+}(W)$

an rasch ab. Wenn wir vorher von einer möglichst exakten Behandlung der Größen K(W) und M(W) gesprochen haben, meinten wir eben die Berücksichtigung dieser großen inelastischen Effekte .

Die Aufgabe, die wir uns nun stellen, ist, die Relationen (39) auf den inelastischen Bereich zu verallgemeinern. Dazu wollen wir die Ableitung von (39) kurz skizzieren. Wenn T die Reaktionsmatrix ist, lautet die Unitaritätsrelation:

$$\text{(42)} \qquad Im\,T = q\,T^{+}T \;;$$

q ist der Impulsbetrag im Schwerpunktsystem.

Der Formfaktor $K(W)$ und die Elektroproduktionsamplitude sind bestimmte Matrixelemente von T und zwar:

$$\text{(43)} \qquad K(W) = \langle \pi N | T | N \rangle$$
$$M(W) = \langle \pi N | T | \gamma N \rangle \;.$$

Wir wenden (42) auf die Matrixelemente (43) an, indem wir ein vollständiges System von Zwischenzuständen $|n\rangle$ einschieben:

$$\text{(44)} \qquad Im\,K(W) = q \sum_{|n\rangle} \langle \pi N | T^{+} | n \rangle \langle n | T | N \rangle$$
$$Im\,M(W) = q \sum_{|n\rangle} \langle \pi N | T^{+} | n \rangle \langle n | T | \gamma N \rangle \;.$$

Dabei ist $|n\rangle = |m\pi, N\rangle \;;\; m \geq 1$.

Im elastischen Bereich $(M + 1,\ M + 2)$ trägt nur der niedrigste Zwischenzustand $|n\rangle = |\pi, N\rangle$ zur Summe in (44) bei. Wenn wir die Bezeichnung

$$\text{(40')} \qquad h(W) \equiv q \langle \pi N | T | \pi N \rangle = q \cdot \frac{e^{2i\delta} - 1}{2iq} =$$
$$= e^{i\delta(W)} \sin\delta(W)$$

einführen, ergeben sich die Relationen (39). Wollen wir jedoch weitere Zwischenzustände ($m \geq 2$) und somit die inelastischen Effekte berücksichtigen, so wird die Phase in (40) komplex, und es gilt wegen (41):

$$h(W) = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i} = \frac{\eta e^{2i\delta_1} - 1}{2i} \quad ; \; \delta_1 = \mathrm{Re}\,\delta \tag{45}$$

Es fragt sich nun, welchen Einfluß die Einführung von komplexen Phasen auf die Größen $K(W)$ und $M(W)$ hat. Dies hängt entscheidend von der Konvention über die Zwischenzustände in (44) ab. Wir greifen zwei vollständige Systeme $\{|n>\}$ heraus, die in der Literatur meist vorkommen:

a) Das System der einlaufenden Zustände (bzw. auslaufenden Zustände). Während die Summen in (44) im ganzen reell sein müssen (links steht eine reelle Zahl!), sind die einzelnen Summanden nicht reell. Man beschränkt sich zwar auf die 1. Näherung ($m = 1$), berücksichtigt aber die komplexe Phase und verlangt, daß der so gebildete Beitrag reell ist, d. h. (Gln. (39)):

$$\begin{aligned} h^*(W)\,K(W) &\approx \text{reell} \\ h^*(W)\,M(W) &\approx \text{reell} \end{aligned} \tag{46}$$

mit $h(W)$ aus (45). Die Bedingungen (46) laufen darauf hinaus, daß $K(W)$ und $M(W)$ die Phase φ von $h(W)$ haben müssen, mit

$$\mathrm{tg}\,\varphi(W) = \frac{\mathrm{Im}\,(h(W))}{\mathrm{Re}\,(h(W))} = \frac{1 - \eta \cos 2\delta_1(W)}{\eta \sin 2\delta_1(W)} \; . \tag{47}$$

Hat man die Phase, wie in (47) festgelegt, so gehen die U.R. (39) über in

$$(48)\qquad Im\,K(W) = e^{-i\varphi(W)} \sin\varphi(W)\, K(W) = h^*(W)\, K(W) + \frac{(1-\eta^2)\,|K(W)|}{2\sqrt{1+\eta^2-2\eta\cos 2\delta_1}}\,.$$

(entsprechend für M(W))

Aus (48) entnimmt man, daß die Einführung der komplexen Phase in die Unitaritätsrelation (39) unter den Bedingungen (46) zu einer Erweiterung der Unitaritätsrelation führt in dem Sinne, daß Beiträge von weiteren Zwischenzuständen implizit eingefürt werden.

b) Das System $\left\{\frac{1}{2}\left(|in\rangle + |out\rangle\right)\right\}$. Hier sind die einzelnen Terme in (44) reell, denn wegen der TP-Invarianz lautet z. B. die 1. Näherung [4]:

$$q\,\frac{1}{2}\left(\langle \pi N|T^+|\pi N\rangle_{in}\,{}_{in}\langle \pi N|T|\gamma N\rangle + \langle \pi N|T^+|\pi N\rangle_{out}\,{}_{out}\langle \pi N|T|\gamma N\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(h^*M + hM^*\right) = Re\,(h^*M)\,.$$

Im elastischen Bereich besteht ohnehin Phasengleichheit zwischen $h\,(W)$ und $M(W)$ bzw. $K(W)$, so daß die Relationen (39) gültig bleiben. Wenn man aber über den elastischen Bereich hinausgeht und die Inelastizität berücksichtigt, fordert man, daß die Unitaritätsrelationen die Form annehmen:

$$(49)\qquad Im\,K(W) = Re\,(h^*K)$$
$$Im\,M(W) = Re\,(h^*M)$$

Daraus ergibt sich die Phasenfestlegung:

$$(50) \qquad tg\,\varphi = \frac{Re(h(w))}{1 - Im(h(w))} = \frac{\eta \sin 2\delta_1}{1 + \eta \cos 2\delta_1} \quad .$$

Hier führt jedoch - im Gegensatz zu Fall a) - die neue Phase aus (50) zu keiner Erweiterung der Unitaritätsrelation, d. h. höhere Beiträge werden in die Unitaritätsrelation nicht eingeführt. Mit anderen Worten, nach der Einführung der komplexen Phase behält die Unitaritätsrelation (39) im Falle b) ihre Form (Gl. 49) bei, während sie im Fall a) einen zusätzlichen Inelastizitätsbeitrag (2. Term in Gl. (48)) hinzubekommt.

Dieser Umstand ist unserer Ansicht nach der wichtigste Grund[+)] für die Entscheidung für den Fall a), d. h. für die Phase φ, wie sie in (47) gegeben wird[++)].

Dieser Unterschied zwischen a) und b) rührt natürlich daher, daß die 1. Näherungen in beiden Fällen nicht identisch sind. Denn ein auslaufender π-N-Zustand läßt sich in eine Summe entwickeln, zu der alle einlaufenden Zustände beitragen. Übrigens haben $K(W)$ und $M_{1-}(W), \delta_{1-}(W)$ bzw. $K(-W)$ und $E_{0+}(W)$, $\delta_{0+}(W)$ wegen (48) dieselbe Phase, so daß die Größen $K^*(W) M_{1-}(W)$ usw. in (27) und (27') immer reell sind.

7. Der π-N-Formfaktor

Wir wollen nun den in § 5 eingeführten π-N-Formfaktor $K(\pm W)$ genauer untersuchen und berechnen.

Aufgrund unserer bisherigen Kenntnisse über die Formfaktoren betrachten wir diese Größen als analytische Funktionen, die - abgesehen von Polen - überall holomorph sind bis auf den reellen Unitaritätsschnitt, der bei der niedrigsten zulässigen Produktionsschwelle beginnt. Der π-N-Formfaktor $K(\pm W)$, für

+) Vgl. die Diskussion in[18]), wo ebenfalls die Phase φ aus (47) vorgeschlagen wird.

++) Am besten gibt diesen Sachverhalt der Fall der π-N-Streuung wieder. Wenn $A = h/q$ die entsprechende Streuamplitude etwa im P_{11}-Kanal darstellt, so ergibt sich aus (47) die bekannte Relation $Im\,A = q|A|^2 + (1-\eta^2)/4q$, während aus (50) folgt $Im\,A = q|A|^2$ im Widerspruch zu (45) mit $\eta \neq 1$

den wir ebenfalls diese Annahme machen, hat die Unitaritäts-schnitte $(-\infty, -(M+1))$ und $((M+1), +\infty)$. Seine Phase wird durch

$$\text{(51)} \qquad Im\, K(\pm W) = tg\, \delta(\pm W)\, Re\, K(\pm W) \quad ; \quad \delta(M+1) = 0$$

definiert.

Zur Bestimmung der Phase ziehen wir die Unitaritätsrelation (44) heran, und bei Berücksichtigung nur des niedrigsten Zwischenzustandes (π-N-Zustand) können wir mit Bincer[1] schreiben:

$$\text{(39)} \qquad Im\, K(\pm W) = h^{*}(\pm W)\, K(\pm W)$$

mit $h(W)$ aus (40).

Wie schon erwähnt, gilt hier $\delta_p(W) = \delta(W)$, $\delta_s(W) = \delta(-W)$, wie aus der allgemeinen Identität $\delta_{\ell_+}(\pm W) = \delta_{(\ell+1)_\mp}(\mp W)$ folgt (Ref.[9]). Man sieht, daß der π-N-Formfaktor allein durch seine Phase und die Normierung gegeben ist, die wie folgt festgelegt wird:

$$\text{(52)} \qquad K(M) = 1$$

Die Phase $\delta(\pm W)$ ist, wie gesagt, im elastischen Bereich gleich der Streuphase in der π-N-Streuung. Im inelastischen Bereich wollen wir gemäß der Diskussion in § 6 setzen:

$$\text{(53)} \qquad \delta(+W) = \varphi_p(W) = arctg\left(\frac{1-\eta_p \cos 2\delta_{p_1}}{\eta_p \sin 2\delta_{p_1}}\right)$$

$$\delta(-W) = \varphi_s(W) = arctg\left(\frac{1-\eta_s \cos 2\delta_{s_1}}{\eta_s \sin 2\delta_{s_1}}\right)$$

mit η_p bzw. η_s als den Inelastizitäten im P_{11}- bzw. S_{11}-Kanal und $\delta_{p_1} = Re\,\delta_p$, $\delta_{s_1} = Re\,\delta_s$.

Nun können wir aufgrund der oben erwähnten analytischen Eigenschaften von $K(W)$ und (51) eine Integralgleichung für $K(\pm W)$ hinschreiben:

$$(54)\qquad K(\pm W) = \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty}\left\{ \frac{tg\vartheta(W')\,Re\,k(W')}{W' \mp (W+i\epsilon)} + \frac{tg\vartheta(-W')\,Re\,K(-W')}{W' \pm (W+i\epsilon)} \right\} dW'$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Integralgleichung ist nach Omnès[20] - unter Berücksichtigung von (52) und (53) - :

$$(55)\qquad K(W) = exp\left\{ \frac{W-M}{\pi}\int_{M+1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_p(W')}{(W'-M)(W'-W-i\epsilon)} - \frac{\varphi_s(W')}{(W'+M)(W'+W)} \right] dW' \right\} P(W)$$

wobei $P(W)$ ein willkürliches Polynom von W mit $P(M)=1$ ist. Die Lösung (55) ist daher nicht eindeutig. Um dies besser zu sehen, untersuchen wir zunächst das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion in (55). Es ist:

$$(56)\qquad \lim_{W\to\infty} exp\left\{ \frac{W-M}{\pi}\int_{M+1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_p(W')}{(W'-M)(W'-W)} - \frac{\varphi_s(W')}{(W'+M)(W'+W)} \right] \right\} \sim W^{-\frac{1}{\pi}\left(\varphi_p(\infty)+\varphi_s(\infty)\right)} = W^{-3/2}$$

Hier haben wir die Annahme

$$(57)\qquad \varphi_p(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi_s(\infty) = \pi$$

gemacht, die durch die experimentellen Daten (Streuphase, Inelastizität) bei hohen Energien gerechtfertigt wird.x)

Auf der anderen Seite muß sich $|K(W)|$ in (54) wie $W^{1-\epsilon}$ $(\epsilon>0)$ verhalten, wenn das erste Integral konvergieren soll. Daher ist wegen (56) höchstens ein Polynom ersten Grades in (55) zulässig. Andernfalls sollten wir statt (54) eine Dispersionsrelation mit Subtraktion hinschreiben, die wiederum willkürliche Konstanten in die Theorie einführen würden. Unter bestimmten Annahmen kann man zeigen[4], daß der Formfaktor keine Nullstellen hat, so daß

$$(57')\qquad P(W) = 1$$

ist.

x) Die reellen Streuphasen und die Inelastizitätskoeffizienten für die π-N-Streuung wurden der Ref.(31) entnommen.

Bezüglich des asymptotischen Verhaltens des π-N-Formfaktors gibt es - im Gegensatz zum elektromagnetischen Formfaktor - keine experimentellen Anhaltspunkte, da er nicht direkt beoabachtbar ist. Ein mögliches Kriterium wäre die Erfüllung der Asymptoten-Bedingung [2] für den entsprechenden irreduziblen Vertex: $\bar{K}(W) \to 0$ für $W \to \infty$. Nach den Ausführungen in §§ 1 und 3c ist

$$\bar{K}(W) = Z(W) K(W) \tag{58}$$

mit[9]

$$Z^{-1}(W) - 1 \sim \int \frac{dW'}{W'} \left[|K(W')|^2 + |K(-W')|^2 \right] \; ; \quad W \to \infty \tag{58'}$$

Man kann jedoch feststellen, daß die Asymptoten-Bedingung wegen (58) und (58') für eine große Klasse von Funktionen $K(W)$ erfüllt werden kann.

Wenn man andererseits bedenkt, daß wir in § 2 die Dispersionsrelation (10b) für den Formfaktor $F_2(W,\lambda^2)/(W+M)$ postuliert haben, erkennt man, daß wir dadurch die Forderung $M_{1-}(W,\lambda^2) K^*(W) \sim W^{-\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$ für $W \to \infty$ gestellt haben. Unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens der Amplitude $M_{1-}(W)$ (s. Bornsche Terme im Anhang) wird der Ansatz (55) mit (57') gerechtfertigt. Es ist also endgültig:

$$K(W) = exp \left\{ \frac{W-M}{\pi} \int_{M+1}^{\infty} dW' \left[\frac{\varphi_P(W')}{(W'-M)(W'-W-i\epsilon)} - \frac{\varphi_S(W')}{(W'+M)(W'+W)} \right] \right\} \tag{59}$$

8. Multikanal-Modell für den π-N-Formfaktor

Wir haben in § 6 gesehen, daß in den uns interessierenden Kanälen P_{11} und S_{11} starke inelastische Effekte auftreten. Diese Effekte haben wir dort phänomenologisch durch die Einführung der komplexen Phase behandelt. Eine konsequentere Methode wäre jedoch,

neben dem elastischen Kanal (d. h. π-N-Zustand) in der Unitaritätsrelation (44) weitere Kanäle, etwa den Zustand $|2\pi, N\rangle$ explizit zu berücksichtigen.

Wir werden uns hier auf den P_{11}-Kanal und den π-N-Formfaktor beschränken. Wegen einer entsprechenden Behandlung der Elektroproduktionsamplituden verweisen wir auf den Schluß dieses Paragraphen.

Wie schon erwähnt, spielt im P_{11}-Kanal des π-N-Systems die Roper-Resonanz R mit ($J^P = 1/2^+$, $I = 1/2$, Masse $\approx$ 1470 MeV) eine wichtige Rolle. Im Rahmen einer bootstrap-Rechnung kann man zeigen[21], daß die Resonanz R ein gebundener ε-N-Zustand ist, wobei ε eine 2π-S-Wellen-Resonanz mit ($J^P = 0^+$, $I = 0$, Masse $\approx$ 730 MeV) ist. Den nichtresonanten Teil des π-N-Systems im P_{11}-Kanal denkt man sich aus einem Nukleon und dem σ-Meson ($J^P = 0^+$, $I = 0$, Masse $\approx$ 410 MeV) zusammengesetzt.

Wir haben also insgesamt drei Systeme πN, εN und σN im P_{11}-Kanal, und man kann versuchen, alle diese Systeme im Rahmen eines 3-Kanal-Modells simultan zu behandeln. Tatsächlich haben entsprechende Untersuchungen[21] ergeben, daß dieses Modell die phänomenologischen Daten der π-N-Streuung (Phasen, Inelastizität) bis zu einer Energie von etwa 1,5 GeV gut reproduziert[+]. Wir beschreiben kurz die Methode für das Streuproblem, und dann gehen wir zum π-N-Formfaktor über.

a) Wir führen die Streuamplituden $f^{\pi N-\pi N}(w)$, $f^{\pi N-\sigma N}(w)$, $f^{\pi N-\varepsilon N}(w)$, $f^{\sigma N-\pi N}(w) = f^{\pi N-\sigma N}(w)$ (wegen der Zeitumkehrinvarianz), $f^{\sigma N-\sigma N}(w)$, $f^{\sigma N-\varepsilon N}(w)$, $f^{\varepsilon N-\pi N}(w) = f^{\pi N-\varepsilon N}(w)$, $f^{\varepsilon N-\sigma N}(w) = f^{\sigma N-\varepsilon N}(w)$, $f^{\varepsilon N-\varepsilon N}(w)$ ein. Sie beziehen sich auf die angezeigten Prozesse im ($J = \frac{1}{2}$, $I = \frac{1}{2}$) - Zustand. Es ist etwa:

$$f^{\pi N-\pi N}(w) = \frac{e^{i\delta_P(w)} \sin\delta_P(w)}{q_1(w)}$$

[+] Auch weitere Multikanal-Modelle sind vorgeschlagen worden, die in Ref.21) zitiert werden. Wir haben das Modell[21] herausgegriffen, weil es konsistent ist mit dem empirischen N/D Potential von Bart and Warnock.[22]

die π-N-Streuamplitude mit $q_1(W)$ als dem Impulsbetrag im Schwerpunktsystem. Wenn $q_2(W)$, $q_3(W)$ die entsprechenden Größen für η-N- und K-N-Streuung sind, kann man die Diagonalmatrix

$$\varrho(W) = \begin{pmatrix} q_1\vartheta(q_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & q_2\vartheta(q_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & q_3\vartheta(q_3^2) \end{pmatrix}$$

definieren, mit deren Hilfe die Unitaritätsrelation im Multikanal-Modell durch die Beziehung:

$$\mathrm{Im}\, T^{-1}(W) = -\varrho(W)$$

gegeben ist. Die Matrix T(W) setzt sich aus den Streuamplituden zusammen:

$$T(W) = \begin{pmatrix} f^{\pi N-\pi N} & f^{\pi N-\eta N} & f^{\pi N-\kappa N} \\ f^{\eta N-\pi N} & f^{\eta N-\eta N} & f^{\eta N-\kappa N} \\ f^{\kappa N-\pi N} & f^{\kappa N-\eta N} & f^{\kappa N-\kappa N} \end{pmatrix}$$

Wir führen nun neue Amplituden, die das richtige Schwellenverhalten haben:

(60)
$$t_1^1(W) = f^{\pi N-\pi N}\left(\frac{W}{E_1-M}\right),\quad t_2^1(W) = f^{\pi N-\eta N}\frac{W}{\left[(E_1-M)(E_2+M)\right]^{1/2}},\quad t_3^1(W) = f^{\pi N-\kappa N}\frac{W}{\left[(E_1-M)(E_3+M)\right]^{1/2}},$$
$$t_2^2(W) = f^{\eta N-\eta N}\left(\frac{W}{E_2+M}\right),\quad t_3^2(W) = f^{\eta N-\kappa N}\frac{W}{\left[(E_2+M)(E_3+M)\right]^{1/2}},\quad t_3^3(W) = f^{\kappa N-\kappa N}\left(\frac{W}{E_3+M}\right),$$

und die Matrix

(61)
$$r(W) = \begin{pmatrix} q_1\vartheta(q_1^2)\dfrac{E_1-M}{W} & 0 & 0 \\ 0 & q_2\vartheta(q_2^2)\dfrac{E_2+M}{W} & 0 \\ 0 & 0 & q_3\vartheta(q_3^2)\dfrac{E_3+M}{W} \end{pmatrix}$$

ein. Mit den Matrizen $t(W) = (t^i_k)$ und $r(W)$ lautet nun die Unitaritätsrelation:

(62)
$$\mathrm{Im}\, t^{-1} = -r$$

oder

$$\mathrm{Im}\, t^i_j = r^k\, t^{*k}_j\, t^i_k \quad ;\ r^l_l = r^l \qquad \text{(ohne Summation!)}$$

bzw.

(62') $$Im\, t = t^{+} r t \quad ,$$

wobei die Einsteinsche Summationskonvention über obere und untere Indizes angenommen wird.

b) Neben den Streuamplituden werden die drei Formfaktoren betrachtet: $K^{N\pi N}$, $K^{N\epsilon N}$, $K^{N\epsilon N}$. K^{NnN} bezieht sich auf den besprochenen π-N-Formfaktor usw. Das erste Nukleon wird jeweils als virtuell angesehen. Wir vereinfachen die Bezeichnung durch:

$$K^{NnN} \equiv k_1 \quad , \quad K^{N\epsilon N} \equiv k_2 \; , \; K^{N\epsilon N} \equiv k_3$$

und schreiben die K_i's als Spaltenvektor

(63) $$\vec{K}(w) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{K}^{+}(w) = \left(K^{+1}, K^{+2}, K^{+3}\right)$$

Wir können nun in unserem Modell die Unitaritätsrelation für die Formfaktoren in der Form schreiben[23]:

(64) $$Im\, K_j = r^{i}\, t^{+}_{ij}\, K_i$$
$$Im\, \vec{K} = t^{+} r \vec{K}$$

bzw. $$Im\, \vec{K}^{+} = -\vec{K}^{+} r\, t$$

Der Vergleich zwischen der Unitaritätsrelation für die Streuamplituden (62') und für die Formfaktoren (64) legt den Ansatz nahe:

(65) $$\vec{K} = t\vec{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \vec{K}^{+} = \vec{\varphi}^{+} t^{+}$$

mit $$\vec{\varphi}(w) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w) \\ \varphi_2(w) \\ \varphi_3(w) \end{pmatrix}$$

Die φ_i's sollen analytische Funktionen sein und keine Singularitäten im Bereich der Singularitäten von K_i (d.h. nach der Schwelle für t^{i}_{j}) haben. Sonst sind die φ_i willkürlich.

Wenn wir (65) in (64) einsetzen, ergibt sich

$$\vec{\varphi}^{+} Im\, t = \vec{\varphi}^{+} t^{+} r t \ ,$$

d. h. die Unitaritätsrelation (62) für die Streuamplituden wird durch (65) und die Unitaritätsrelation (64) für die Formfaktoren erfüllt.

c) Für den Fall eines Multikanal-Modells läßt sich die N/D - Methode in Matrixform[21] formulieren. Man schreibt:

(66) $$t = (D^{-1}) N$$

und benützt die Unitaritätsrelation in der Form (62). Dann ist mit (66):

(67) $$Im\, D = Im\left[N (t^{-1})\right] = N\, Im\, t^{-1} = -rN$$ auf dem rechten Schnitt,

Nun wollen wir die Relation (65) ausnützen, die Streuamplituden und Formfaktoren in Zusammenhang bringt. Wegen (66) ist

$$\vec{K} = (D^{-1}) N \vec{\varphi}$$

oder

(68) $$D\vec{K} = N\vec{\varphi} \equiv \vec{\sigma}(W)$$

Die σ_i's sind wie die φ_i's willkürlich und im allgemeinen Polynome, da sie im ganzen endlichen Bereich keine Singularitäten besitzen (die $K_i(W)$'s haben wie die D_i^{-1}'s nur Rechtssingularitäten, die sich wegen (68) gegenseitig wegheben!).

Aus (68) folgt nun das wichtige Resultat:

(69) $$\vec{K} = (D^{-1})\,\vec{\sigma} \qquad \text{d.h.} \quad K_i = (D^{-1})_i^{\,j}\, \sigma_j$$

Wir sehen also, daß die Formfaktoren im wesentlichen den D-Funktionen des entsprechenden Streuproblems zugeordnet werden können. Es bleiben nur die willkürlichen Polynome

zur Bestimmung. Hier handelt es sich genau um dasselbe Problem wie in § 7 (Gl. 55), wo der π-N-Formfaktor im 1-Kanal-Modell untersucht wurde. Wir wollen auch hier annehmen, daß die Formfaktoren keine Nullstellen haben, so daß die σ_ℓ's sich auf Konstanten reduzieren. Diese Konstanten können innerhalb des beschriebenen[21] selbstkonsistenten Modells ohne weitere Annahmen[+] festgelegt werden. Denn es ist $K_1(M) \sim g_{NN\pi}$, $K_2(M) \sim g_{NN\varepsilon}$, $K_3(M) \sim g_{NN\sigma}$ und die Kopplungskonstanten $g_{NN\varepsilon}$ und $g_{NN\sigma}$ werden im Modell selbst bestimmt ($g_{NN\pi}$ wird als bekannt betrachtet). Der uns interessierende π-N-Formfaktor $K_1(W)$ ist also:

$$K_1(W) = \left(D^{-1}(W)\right)^1_j \varepsilon_j = \left(D^{-1}(W)\right)^1_1 K_1(M) + \left(D^{-1}(W)\right)^2_1 K_2(M) + \left(D^{-1}(W)\right)^3_1 K_3(M) \tag{70}$$

Der uns interessierende π-N-Formfaktor K(W) ist bis auf kinematische Faktoren, die in (60) eingeführt wurden, der Größe $K_1(W)$ aus (70) gleich.

Zur Berechnung der D-Funktionen in (70) müssen wir die N/D-Gleichungen lösen. Es ist[21]:

$$D^j_\ell(W) = \delta^j_\ell - \frac{W-M}{\pi} \int_{M_{\ell+1}}^{\infty} \frac{dW'}{(W'-W-i\varepsilon)(W'-M)} \, r^\ell_\ell(W') \, N^j_\ell(W') \tag{71}$$

Für $N^\ell_\ell(W)$ werden nur die Bornschen Terme eingesetzt, die in Ref.[21] angegeben werden.

Zum Schluß bemerken wir, daß wir ebenfalls die Elektroproduktionsamplituden mit Hilfe eines Multikanal-Modells behandeln könnten[26]. Wir haben es nur deswegen vermieden, weil die P_{11}-Resonanzen in der Photoproduktion noch nicht gut verstanden worden sind[17].

[+] Im Gegensatz zum entsprechenden Fall der elektromagnetischen Formfaktoren, indem einige Konstanten in die Theorie eingeführt werden müssen[24, 25].

9. Berechnung der Elektroproduktionsamplituden

Das Problem der Photoproduktion und Elektroproduktion ist bislang nicht ganz befriedigend gelöst worden, obwohl eine qualitative Übereinstimmung mit den experimentellen Daten vorliegt. Wir wollen nicht auf die Schwierigkeiten und Diskrepanzen eingehen, die hier bezeichnend sind, sondern nur hervorheben, daß die hier zu erzielenden Resultate mit manchem Vorbehalt angesehen werden sollten.

Wir werden eine dispersionstheoretische Untersuchung vornehmen, die auf die CGLN-Arbeit[13] und eine Arbeit von Ball[14] gründet. Der Fall der Elektroproduktion wurde in Ref.[29] und Ref.[16] behandelt. Im wesentlichen folgen wir den Arbeiten von Schwela et al.[18, 27, 28], die eine exakte Lösung der singulären Integralgleichungen für die Multipolamplituden präsentieren.

Wir fangen an mit der Aufstellung von Dispersionsrelationen für festen Impulsübertrag . Für die invarianten Amplituden A_i[14] nehmen wir eine Mandelstamdarstellung an, die für festes t lautet:

$$A_i(s,t) = A_i^{Born}(s,t) + \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} ds' \; Im A_i(s',t)\left[\frac{1}{s'-s} \pm \frac{1}{s'-u}\right].$$

Wenn wir A_i auf die Schwerpunktamplituden F_i in Gl.(21) transformieren und dann das Projektionsverfahren (27a) anwenden, erhalten wir die Dispersionsrelation für die Multipolamplituden:

$M(W,\lambda')$ $\left(= M_{1-}, E_{0+}, S_{1-}, S_{1+}\right)$

(72)

$$M(W,\lambda') = M^{Born}(W,\lambda') + \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} dW' \left[K_{M M_{1+}^{3/2}}(W,W',\lambda') \, Im M_{1+}^{3/2}(W',\lambda') + K_{M E_{1+}^{3/2}}(W,W',\lambda') \, Im E_{1+}^{3/2}(W',\lambda')\right] + \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{Im M(W')}{W'-W-i\varepsilon} .$$

Hier bedeuten M^{Born} die Bornschen Terme der betreffenden Amplitude, $K_{M M_{1+}^{3/2}}$ und $K_{M E_{1+}^{3/2}}$ die nichtsingulären Integralkerne, die die Kopplung des magnetischen und elektrischen Dipols $M_{1+}^{3/2}$ und $E_{1+}^{3/2}$ (im Isospinzustand $\frac{3}{2}$) zur Amplitude M vermitteln. Das sind die Amplituden, die die starke Resonanz $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ enthalten und dementsprechend als einzige Multipole betrachtet werden, die

zu M Beiträge liefern. Das Integral in (72) liefert den Rückstreuungsbeitrag. In $M(W')$ wird dabei aus dem erweiterten Watson-Theorem entnommen, das wir in § 6 (Gl.(48)) unter Berücksichtigung der inelastischen Effekte besprochen haben:

$$(73) \qquad Im\, M(W) = e^{-i\varphi(W)} \sin\varphi(W) M(W) \equiv \bar{h}^*(W) M(W)$$

mit $\varphi(W)$ aus (47), wobei $\delta_1(W)$ und $\eta(W)$ dem entsprechenden π-N-Streuproblem entnommen wird.

Bevor wir die Amplituden $M_{1-}(W), E_{0+}(W), S_{1-}(W), S_{0+}(W)$ ausführlicher benandeln, wollen wir die Lösung der Integralgleichung (72) angeben[27]. Wir schreiben (70) in der Form:

$$(72') \qquad M(W,\lambda^1) = M^0(W,\lambda^1) + \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{\bar{h}^*(W') M(W',\lambda^1)}{W'-W-i\varepsilon} .$$

(72') hat unter der Voraussetzung, daß

$$(73) \qquad M(\infty,\lambda^1) = 0$$

ist, eine partikuläre Lösung:

$$(74) \qquad M^P(W,\lambda^1) = M^0(W,\lambda^1) + \frac{1}{\pi}\frac{1}{D(W)}\int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{D(W')\bar{h}(W) M^0(W',\lambda^1)}{W'-W-i\varepsilon} .$$

Dabei ist $\frac{1}{D(W)}$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung:

$$M_h(W,\lambda^1) = \frac{1}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{\bar{h}^*(W') M_h(W',\lambda^1)}{W'-W-i\varepsilon} ;$$

$1/D$ ist daher ein Omnès-Integral (vgl. Gl. (55)):

$$(75) \qquad \frac{1}{D(W)} = \exp\left\{\frac{W}{\pi}\int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{\varphi(W')}{W'(W'-W-i\varepsilon)}\right\}$$

mit

$$D(0) = 1 .$$

Die allgemeinste Lösung von (72') setzt sich aus der partikulären Lösung (74) und der allgemeinsten Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung zusammen, es ist also:

$$M(W,\lambda^2) = M^P(W,\lambda^2) + P(W,\lambda^2)\frac{1}{D(W)} \quad , \tag{76}$$

wobei $P(W,\lambda^2)$ ein willkürliches Polynom in W ist. Der Grad dieses Polynoms bestimmt sich aus dem asymptotischen Verhalten der Amplitude $M(W,\lambda^2)$ und der Funktion $D(W)$. Einerseits ist (vgl. Gl. (56))

$$\lim_{W\to\infty} \frac{1}{D(W)} \sim W^{-\frac{\varphi(\infty)}{\pi}} \quad , \tag{77}$$

andererseits muß wegen (73) und $M^P(\infty,\lambda^2)=0$ gelten:

$$\lim_{W\to\infty} P(W,\lambda^2)\frac{1}{D(W)} = 0 \quad .$$

Wenn also $0<\varphi(\infty)\leq\pi$ ist, wie in unserem Fall (vgl. Gl. (57)), ist $P(W,\lambda^2)$ ein Polynom 0. Grades:

$$P(W,\lambda^2) = C(\lambda^2) \, . \tag{78}$$

$C(\lambda^2)$ kann durch Anpassung an die experimentellen Daten bestimmt werden[+]. Die Größe $C(\lambda^2)$ hat aber auch einen Zusammenhang mit dem CDD-Pol in der N/D-Methode. Wenn man nämlich die Amplitude $M(W)$ mit dieser Methode untersuchen will:

$$M(W) = \frac{N(W)}{\mathcal{D}(W)} \quad ; \quad \mathcal{D}(\infty) = 1 \quad ,$$

[+] In Ref. 27), 28), 18) bezieht sich die Diskussion über $C(\lambda^2)$ eigentlich nur auf die Photoproduktion. In dem Fall ist $C(0)$ eine Konstante, die aus den experimentellen Daten bestimmt werden kann. Die Struktur der Elektroproduktionsamplituden ist jedoch im wesentlichen dieselbe wie die der Photoproduktion, denn λ^2 erscheint nur als Parameter. Die Phase $\varphi(W)$ etwa ist dieselbe in beiden Fällen. Auch das asymptotische Verhalten der Amplituden wird nicht wesentlich durch den Parameter λ^2 beeinflußt.

muß man bedenken, daß $\mathcal{D}(W)$ proportional zu D(W) aus (75) ist. Wegen (77) und (56) tritt in $\mathcal{D}(W)$ ein CDD-Pol ein:

$$\mathcal{D}(W) = \frac{D(W)}{a - W} \quad .$$

Man kann zeigen[27], daß der Pol a mit c aus (78) über die Gleichung

$$c = - D(a) M^P(a)$$

zusammenhängt.

Wenn man noch die λ^2-Abhängigkeit berücksichtigt, kann man schreiben:

$$c(\lambda^2) = - D(a) M^P(a, \lambda^2) \quad . \tag{79}$$

Hier haben wir angenommen (vgl. Fußnote S. 43), daß die λ^2-Abhängigkeit der Amplitude $M(W,\lambda^2)$ nur in der $\mathcal{N}$-Funktion steckt, so daß der CDD-Pol a λ^2-unabhängig ist und daß er folglich aus der Photoproduktionsanalyse bestimmt werden kann. Soweit c bekannt ist, werden wir bei der Rechnung Gl. (79) mit $\lambda^2 = 0$ auflösen und a bestimmen, a wird dann in (80) eingesetzt.

Zu rechnerischen Zwecken machen wir folgende Bemerkung. Die Lösung der ursprünglichen Integralgleichung (72') läßt sich mit (76), (74) und (79) in der Form schreiben:

$$M(W,\lambda^2) = M^P(W,\lambda^2) - \frac{D(a)}{D(W)} M^P(a,\lambda^2) \quad , \tag{80}$$

wobei die λ^2-Abhängigkeit in der Funktion $M^P(W,\lambda^2)$ steckt. Sie wird explizit angegeben und enthält neben anderen Funktionen (die ebenfalls λ^2-abhängig sind) die 5 elektromagnetischen Formfaktoren, von denen in § 3b die Rede war (etwa 2 Protonen-Formfaktoren, 2 Neutronen-Formfaktoren und der π-Form-Faktor). Es ist daher zweckmäßig, die Amplitude $M(W,\lambda^2)$ in eine Summe aufzuspalten, die die Formfaktoren explizit enthält (vgl. Schluß von § 5).

$$M(W,\lambda^2) = b_1^M(W,\lambda^2) F_1^P(\lambda^2) + b_2^M(W,\lambda^2) F_1^N(\lambda^2) + b_3^M(W,\lambda^2) G_M^P(\lambda^2) + b_4^M(W,\lambda^2) G_M^N(\lambda^2) + b_5^M(W,\lambda^2) F_\pi(\lambda^2) \tag{81}$$

Nun kommen wir zu den einzelnen Amplituden $M_{1-}, E_{0+}, S_{1-}, S_{0+}$. Wie man an ihren Bornschen Termen (s. Anhang) sehen kann, besitzen sie kinematische Singularitäten und haben ein asymptotisches Verhalten derart, daß das Integral in (72') nicht konvergiert. Deshalb führen wir neue Amplituden ein+):

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_{1-}(W,\lambda^2) &\equiv \frac{\left[(E_1+M)(E_2+M)\right]^{1/2}}{kq} \cdot M_{1-}(W,\lambda^2) \\
\bar{E}_{0+}(W,\lambda^2) &\equiv \frac{1}{\left[(E_1+M)(E_2+M)\right]^{1/2}} \cdot E_{0+}(W,\lambda^2) \qquad (82) \\
\bar{S}_{1-}(W,\lambda^2) &\equiv \frac{1}{q}\left(\frac{E_2+M}{E_1+M}\right)^{1/2} \cdot S_{1-}(W,\lambda^2) \\
\bar{S}_{0+}(W,\lambda^2) &\equiv \frac{1}{k}\left(\frac{E_1+M}{E_2+M}\right)^{1/2} \cdot S_{0+}(W,\lambda^2)
\end{aligned}
$$

Nach den Ausführungen in § 5 haben die Amplituden die Isospinstruktur

$$
\bar{M}_{1-}^{V} = \bar{M}_{1-}^{(+)} + 2\bar{M}_{1-}^{(-)}, \quad \bar{M}_{1-}^{S} = 3\bar{M}_{1-}^{(0)}, \quad \text{ähnlich für } \bar{E}_{0+}, \bar{S}_{1-}, \bar{S}_{0+}. \qquad (83)
$$

Aus Gründen, die bald ersichtlich werden, wollen wir hier nur die Kombinationen:

$$
\bar{M}_1 \equiv 3\bar{M}_{1-}^{(0)} + \bar{M}_{1-}^{(+)} + 2\bar{M}_{1-}^{(-)} = \bar{M}_{1-}^{S} + \bar{M}_{1-}^{V}, \qquad \text{ähnlich für } \bar{E}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_0 \qquad (84)
$$

in Betracht ziehen. Die Größen $\bar{M}_1$, $\bar{E}_0$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_0$ beziehen sich daher auf die Formfaktoren für Protonen (vgl. Gln. (35), (36) und (37)).

Die Bornschen Terme $\bar{M}_1^B, \bar{E}_0^B, \bar{S}_1^B, \bar{S}_0^B$ werden im Anhang angegeben. Zu den Integralkernen in (72) bemerken wir folgendes: Die Kopplung von $M_{1+}^{3/2}$, $E_{1+}^{3/2}$ zu den Amplituden $M_{1-}^{(0)}$, $E_{0+}^{(0)}$ [18] sowie zu $\bar{S}_1$ und $\bar{S}_0$ wird vernachlässigt. Die übrigen Integralkerne $K_{M_{1-}^{1/2} M_{1+}^{3/2}}, K_{M_{1-}^{1/2} E_{1+}^{3/2}}, K_{E_{0+}^{1/2} M_{1+}^{3/2}}$ und $K_{E_{0+}^{1/2} E_{1+}^{3/2}}$ sind der Arbeit[28] entnommen worden.

In den Photoproduktionsuntersuchungen[28] wird folgender Ansatz gemacht:

) Die Kinematik ist in Gl. (19) angegeben worden.

(85) $$\mathrm{Im}\, M_{1+}^{3/2} = \mathrm{Im}\, M_{1+}^{3/2}\Big|_{CGLN}$$

$$\mathrm{Im}\, E_{1+}^{3/2} = E_{1+e}^{3/2\,BORN} \sin\delta_{33}$$

mit

(85') $$M_{1+}^{3/2}\Big|_{CGLN} = M_{1+\mu}^{3/2} + M_{1+e}^{3/2\,BORN} \cos\delta_{33}\, e^{i\delta_{33}} = \left(\frac{k}{q^2}\frac{\mu_v}{f}\sin\delta_{33} + M_{1+e}^{3/2\,BORN}\cos\delta_{33}\right) e^{i\delta_{33}}$$

Dabei ist δ_{33} die π-N-Streuphase im P_{33}-Kanal, $f^2 = 0{,}08$ (π-N-Kopplungskonstante), $\mu_v = \frac{\mu_p - \mu_N}{2}\frac{e}{2M} = 2.35\,\frac{e}{2M}$. Die Indizes "$\mu$" bzw. "$e$" beziehen sich auf den Teil des Multipols, der mit dem magnetischen Moment μ_v bzw. mit der Ladung e gekoppelt ist. Wir übernehmen den Ansatz (85) auch für den Fall der Elektroproduktion unter der Voraussetzung, daß die λ^2-Abhängigkeit berücksichtigt wird. Für die Bornschen Terme $E_{1+e}^{3/2\,BORN}(W,\lambda^2)$ und $M_{1+e}^{3/2\,BORN}(W,\lambda^2)$ hat Dennery[12] rechnerisch folgende Ausdrücke ermittelt:

(86a) $$\frac{E_{1+e}^{3/2\,BORN}(W,\lambda^2)}{kq} = \frac{ef\,C_3(\lambda^2)}{W-7.5}\quad;\quad C_3(\lambda^2) \simeq -0.05\,(1+0.38\lambda^2)^{-1}$$

$$\frac{M_{1+e}^{3/2\,BORN}(W,\lambda^2)}{kq} = \frac{ef\,C_2(\lambda^2)}{W-7.3}\quad;\quad C_2(\lambda^2) \simeq 0.092\,(1+0.18\lambda^2)^{-1}$$

In der Amplitude $M_{1+\mu}^{3/2}$ in (85') ersetzen wir einerseits $2\mu_v$ durch $G_M^p(\lambda^2) - G_M^N(\lambda^2)$. Andererseits setzen wir eine gesamte λ^2-Abhängigkeit+) ein, die von Zagury[30] angegeben wurde. Insgesamt ist also:

(86b) $$M_{1+\mu}^{3/2}(W,\lambda^2) = \frac{k}{q^2}\frac{e}{4Mf}\left[G_M^p(\lambda^2) - G_M^N(\lambda^2)\right] C_1(\lambda^2)\sin\delta_{33}\, e^{i\delta_{33}}\quad;\quad C_1(\lambda^2) = (1+0.0036\lambda^2)^{-1}.$$

Zum Schluß machen wir eine Bemerkung zur Größe $C(\lambda^2)$ aus (78). Wie schon erwähnt ist diese Größe nur im Falle der Photoproduktion bestimmt worden[18] und zwar in der Kombination:

+) Gemeint ist die λ^2-Abhängigkeit, die von den übrigen Termen von $M_{1+\mu}(W,\lambda^2)$ herrührt.

(87)
$$C_{E_{0+}} = C_{E_{0+}^{(0)}} + \frac{1}{3} C_{E_{0+}^{(3/2)}} = -3.47 \cdot 10^{-6}$$
$$C_{M_{1-}} = C_{M_{1-}^{(0)}} + \frac{1}{3} C_{M_{1-}^{(3/2)}} = 1.9 \cdot 10^{-3} .$$

Dies rührt daher, daß man nur Photoproduktionsdaten an Protonen benützt hat - wegen der Unzuverlässigkeit der entsprechenden Daten aus Prozessen mit Neutronen. Aus dem Grund wollen wir nur die Kombinationen in (84) untersuchen, d. h. nur Protonen-Formfaktoren berechnen. Da für die Elektroproduktion keine entsprechenden Berechnungen vorliegen, wollen wir uns bei der Behandlung von $S_{1-}(W,\lambda^2)$ und $S_{0+}(W,\lambda^2)$ nur auf die partikulären Lösungen beschränken (d. h. wir setzen $C_{S_{1-}} = C_{S_{0+}} = 0$).

10. Ergebnisse und Zusammenfassung

Zur numerischen Rechnung machen wir folgende allgemeine Bemerkung. Alle zu berechnenden Integrale sind aufgrund des asymptotischen Verhaltens der Integranden konvergent. Beim Integral in (71) (Rückstreuungsbeitrag) für die P-Welle (d. h. magnetischer Dipol $M_{1-}(W)$ und skalarer Monopol $S_{1-}(W)$) setzt jedoch dieses asymptotische Verhalten erst bei sehr hohen Energien ein. Diese schwache Konvergenz liegt an der hier gemachten Annahme $\varphi_p(W) \to \pi/2$ f. $W \to \infty$, die für den Integranden das asymptotische Verhalten

$$|D(W)| \sin\varphi_p(W) |\bar{M}(W)| \sim W^{-1/2}$$

bewirkt. Im Falle der S-Welle geht dagegen der Integrand sehr rasch gegen Null wegen $\varphi_3(W) \to \pi$ für $W \to \infty$.
Aus dem Grunde haben wir im Falle der P-Welle einen cut-off bei 25 GeV eingeführt, wodurch sowohl die Photoproduktionsamplituden als auch das magnetische Moment des Protons richtig wiedergegeben werden. Die Dispersionsintegrale für die Formfaktoren (Gln. (29), (31) und (33)) weisen ein besseres asymptotisches Verhalten auf ($\sim W^{-3/2}$ und $\sim W^{-5/2}$), so daß man es bei der Rechnung explizit berücksichtigen kann.

Um unsere Methode zu testen, haben wir den elektrischen und magnetischen Radius des Protons berechnet.

a) Elektrischer Radius

Aus den ersten der Gln. (33) und (12) folgt, daß gilt

$$\langle r_{1P}^2 \rangle \sim \frac{1}{2M} X_1(M,0) + X_2(M,0) ,$$

wobei der erste Term vernachlässigbar ist ($\sim 10^{-2}$). Die Rechnung hat ergeben:

$$\langle r_{1P}^2 \rangle = 0.393\ f^2$$

oder

$$\bar{r}_{1P} = 0.63\ f .$$

Dieser Wert ist zu vergleichen mit dem experimentellen Wert

$$\bar{r}_{1P} = 0.80\ f .$$

Die Abweichung rührt wohl daher, daß wir die skalaren Multipole, die ja hier allein den elektrischen Radius bestimmen, nicht vollständig behandelt haben (vgl. Disk. auf S. 47).

b) Magnetischer Radius

Wenn man den magnetischen Radius anhand der zweiten der Gl (33) berechnen will, kommt man zu einer Beziehung, in der alle Radien (einschließlich π -Meson-Radius) linear auftreten (vgl. § 3b). Man kann daher in diesem Fall unsere Methode nur testen, indem man etwa den Pion-Radius aufgrund der experimentell gut bekannten Radien der Nukleonen berechnet. Aus der Rechnung hat sich folgende Relation ergeben:

$$33.997 \langle r_\pi^2 \rangle = 7.833 \langle r_{1P}^2 \rangle + 7.042 \langle r_{2P}^2 \rangle + 3.555 \langle r_{2N}^2 \rangle + 1.282 \quad x)$$

Mit $\langle r_{1P}^2 \rangle = (0.80)^2 f^2$, $\langle r_{2P}^2 \rangle = (0.94)^2 f^2$ und $\langle r_{2N}^2 \rangle = (0.76)^2 f^2$ (32)

x) Wir haben hier $\langle r_{1N}^2 \rangle = 0$ gesetzt

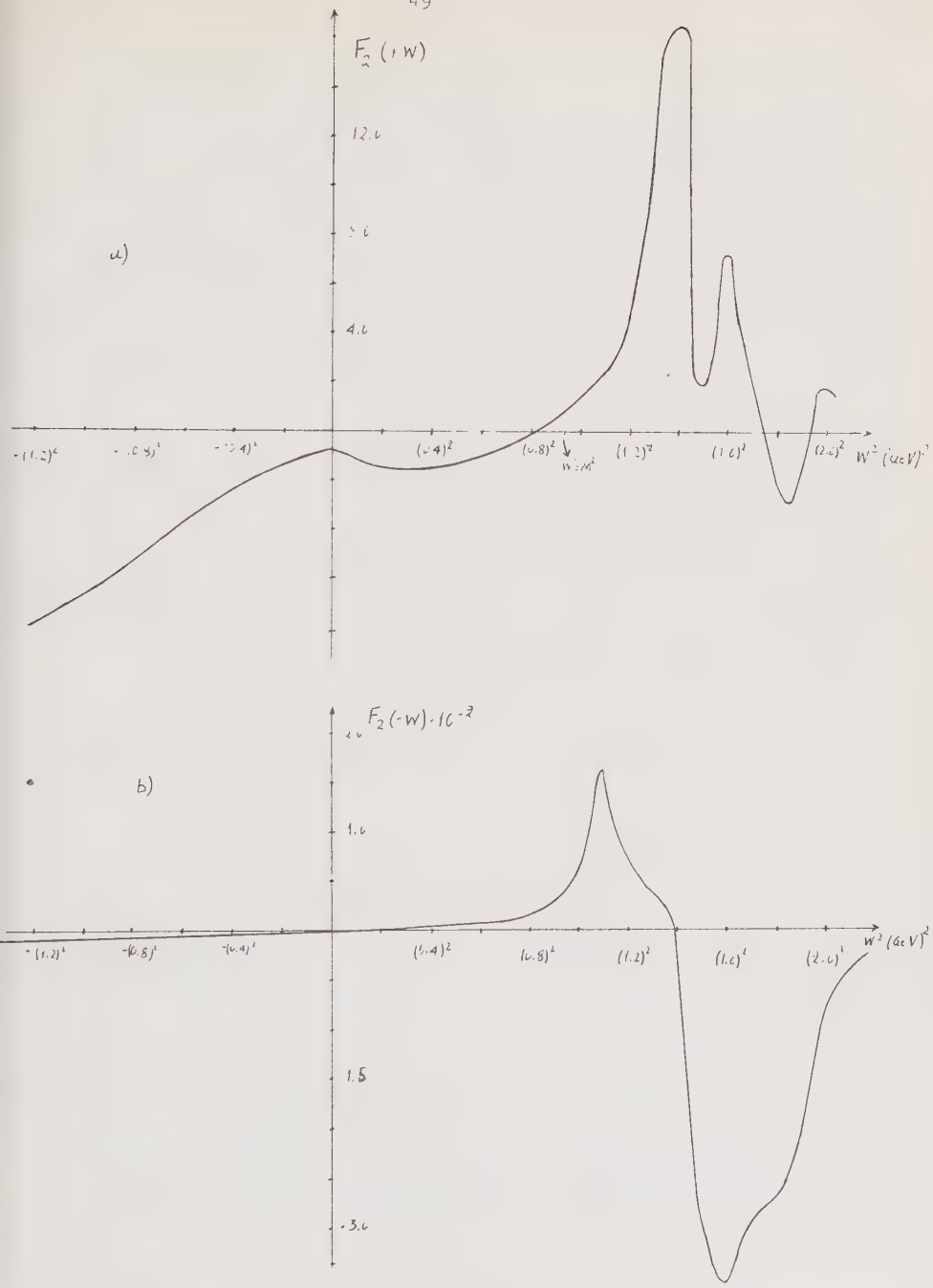

Abb. 5

Elektromagnetische Formfaktoren für virtuelle Nukleonen

a) $Re\, F_2(+W)$

b) $Re\, F_2(-W)$

folgt daraus:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = 0.428 \ f^2$$

oder

$$\bar{r}_\pi = 0.65 \ f \ ,$$

in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen des ϱ-Dominanz-Modells [5].

Zum Schluß wurde der Formfaktor $F_2(\pm W, \lambda^2 = 0)$ für virtuelle Nukleonen berechnet. Die Ergebnisse sind der Abb. 5 zu entnehmen. Die aufgetragenen Größen sind so normiert, daß $F_2(M,0) = 1$ gilt. An der Kurve für $F_2(+W)$ ist bemerkenswert, daß die Virtualitätskorrekturen sehr groß sind. $F_2(W)$ steigt bei $W = M$ ziemlich steil $\left(\frac{\partial F_2(W)}{\partial W}\Big|_{W=M} \simeq 1.65 \ f \right)$ und weist eine ausgesprochene Struktur auf. Die Maxima liegen bei 1.4 bzw. 1.6 GeV, d. h. in der Nähe der Resonanzstellen im P_{11}- bzw. S_{11}-Zustand bei der π-N-Streuung. Der Formfaktor $F_2(W)$ besitzt darüber hinaus eine Nullstelle bei 0.80 GeV, und für $W^2 < (0.8)^2$ GeV^2 bleibt er negativ.

Zusammenfassend stellen wir fest: Unsere Methode, die elektromagnetischen Formfaktoren für virtuelle Nukleonen und Photonen mittels der Elektroproduktionsamplituden und der π-N-Formfaktoren zu berechnen, hat sich in ihren allgemeinen Zügen durch die Rechnung bestätigt. Dabei hat sich die Einführung der inelastischen Phasen als wesentlich erwiesen, denn sonst hätte man kaum die Möglichkeit, die Elektroproduktionsamplituden für hohe Energien zu berechnen. Die Annahmen über das asymptotische Verhalten der Phasen φ_ρ und φ_s sind jedoch nicht zwingend. Für die Rechnung ist die Annahme $\varphi \to \pi$ vorteilhafter als $\varphi \to \pi/2$. Es ist jedoch möglich, ein eindeutiges asymptotisches Verhalten aufgrund von theoretischen Überlegungen (etwa Regge-Modell) fest-

zulegen. Darüber hinaus bedarf die Elektroproduktion (insbesondere die skalaren Amplituden) einer genaueren Untersuchung. Wenn man noch zuverlässigere Daten für die Photoproduktion an Neutronen zur Verfügung hat, kann man die Formfaktoren und die Struktur des π-Mesons ziemlich genau untersuchen, was mittels anderer Methoden bisher nicht möglich gewesen ist. In diesem Fall könnte man auch Zusammenhänge zwischen den Formfaktoren G_M und G_E ermitteln, die dem empirischen Skalengesetz entsprächen.

Ich möchte Herrn Dr. Pfister, der mir dieses Thema vorgeschlagen hat und der mir durch viele Diskussionen zur Klärung verschiedener Fragen verholfen hat, bestens danken. Mein Dank gilt Herrn Prof. F. Bopp (München) und Herrn Prof. K. Wildermuth, die mir die Gelegenheit gegeben haben, meine Arbeit an ihren Instituten anzufertigen. Ich danke ebenfalls der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung dieser Arbeit.

L I T E R A T U R

1. A. M. Bincer, Phys. Rev. 118, 855 (1960)
2. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuov. Cim. 2, 425 (1955)
3. Y. Takahashi, Nuov. Cim. 6, 371 (1957)
4. G. F. Chew, R. Karplus, S. Gasiolowicz and F. Zachariasen Phys. Rev. 110, 268 (1958)
   P. Federbusch, M. L. Goldberger and S. B. Treiman, Phys. Rev. 112, 642 (1958)
5. S. D. Drell and D. J. Silverman, Phys. Rev. Lett. 20, 1325 (1968)
6. S. D. Drell and H. R. Pagels, Phys. Rev. 140,B 397 (1965)
7. L. Grunbaum and D. Yu, Nucl. Phys. B 7, 255 (1968)
8. S. D. Drell, in Proceedings of the International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Hamburg 1965, Vol. I, p. 71
9. M. Ida, Phys. Rev. 136 B 1767 (1964)
   F. Selleri, Nuov. Cim. 39, 1122 (1965)
10. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann, Nuov. Cim. 1, 205 (1955)
11. K. M. Watson, Phys. Rev. 95, 228 (1954)
12. P. Dennery, Phys. Rev. 124, 2000 (1961)
13. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low and Y. Nambu, Phys. Rev. 106, 1345 (1957)
14. J. S. Ball, Phys. Rev. 124, 2014 (1961)
15. L. N. Hand, D. G. Miller and R. Wilson, Revs. Modern Phys. 35,335 (1963)
16. A. Love, R. G. Moorhouse, Nucl. Phys. B 9, 577 (1969)
17. A. Donnachie, in International Conference on High Energy Physics Vienna 1968, p. 139
18. D. Schwela, R. Weizel, Zeitschr. f. Phys. 221, 71 (1969)
19. G. F. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low and Y. Nambu, Phys. Rev. 106 1337 (1957)
20. R. Omnès, Nuov. Cim. 8, 316 (1958)
21. E. N. Argyres and A. Rotsstein, Phys. Rev. 174, 1689 (1968)
22. G. Bart and R. Warnock, Phys. Rev. Lett. 22, 1081 (1969)
23. M. Ida, Phys. Rev. 135,B499 (1964)

24. J. Björken, Phys. Rev. Lett. 4, 473 (1960)
25. R. Dashen and S. Frautschi, Phys. Rev. 143, 1171 (1966)
26. Y. C. Chau, N. Dombey and R. G. Moorhouse, Phys. Rev. 163, 632 (1967)
27. D. Schwela, H. Rollnik, R. Weizel and W. Korth, Zeitschr. f. Phys. 202, 452 (1967)
28. D. Schela and R. Weizel, Technical Report Nr. 1, University of Bonn (1969)
29. S. Fubini, Y. Nambu and V. Wataghin, Phys. Rev. 111, 329 (1958)
30. N. Zagury, Phys. Rev. 145, 1112 (1966)
31. A. Donnachie, in Pion nucleon phase shift analysis in particle interactions at high energies, Scottish Universities Summer School.
32. C. de Vries and R. Hofstadter, Phys. Rev.Lett. 8, 381 (1962).

A N H A N G

Wir geben hier die Bornschen Terme für die Elektroproduktionsamplituden in den Kombinationen (84) an. Die kinematischen Faktoren haben wir gemäß (82) herausgenommen. Hier wurden folgende Größen eingeführt:

$$x = -\frac{2E_2k_0 + \lambda^2}{2kq} \quad , \quad y = \frac{2qk_0 + \lambda^2}{2kq} \quad , \quad Q_\ell(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_\ell(z')}{z'-z}\,dz'$$

$$e^2 = \frac{e_r^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad , \qquad \frac{g^2}{4\pi} = 15 \, .$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_1^B = -\frac{e_r g}{16\pi W}\Bigg[& \left\{\frac{(E_2+M)(W-M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) - \frac{2}{M}\right\}F_1^P + \left\{\frac{2(E_2+M)(W-M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{M}\right\}F_1^N + \left\{\frac{W-M}{(E_1-M)(E_2-M)}Q_1(x) + \frac{W+M}{qk}Q_2(x) - \frac{(E_2+M)(W+M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) + \right. \\
& \left. + \frac{2(W+2M)}{M(W-M)}\right\}G_M^P + 2\left\{\frac{W-M}{(E_1-M)(E_2-M)}Q_1(x) + \frac{W+M}{qk}Q_2(x) - \right. \\
& \left. - \frac{(E_2+M)(W+M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) - \frac{1}{M}\right\}G_M^N - \frac{4(E_2+M)}{3qk}\Big(Q_0(y)-Q_2(y)\Big)F_\pi\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_0^B = \frac{e_r g}{16\pi W}\Bigg[& \left\{-\frac{(E_2-M)(W+M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) + \frac{2}{M}\right\}F_1^P + \left\{-\frac{2(E_2-M)(W+M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) - \right. \\
& \left. - \frac{2}{M}\right\}F_1^N + \left\{\frac{W+M}{(E_1+M)(E_2+M)}Q_1(x) + \frac{W-M}{kq}Q_0(x) + \frac{(E_2-M)(W-M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) - \right. \\
& \left. - \frac{2(W-2M)}{M(W+M)}\right\}G_M^P + 2\left\{\frac{W+M}{(E_1+M)(E_2+M)}Q_1(x) + \frac{W-M}{qk}Q_0(x) + \right. \\
& \left. + \frac{(E_2-M)(W-M)}{3qkM}\Big(Q_0(x)-Q_2(x)\Big) + \frac{1}{M}\right\}G_M^N - \frac{4(E_2-M)}{3qk}\Big(Q_0(y)-Q_2(y)\Big)F_\pi\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{e_r g}{16\pi W}\Bigg[\Bigg\{\frac{2E_2-k_0}{2M}\Big[(W+M)\frac{Q_0(x)}{qk}+(W-M)\frac{E_2+M}{E_1+M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+\frac{4k_0}{\lambda^2}+$$

$$+\frac{1}{M(W-M)}\left(3E_1+W-2M\right)\Bigg\}F_1^P+\Bigg\{\frac{2E_2-k_0}{M}\Big[(W+M)\frac{Q_0(x)}{qk}+$$

$$+(W-M)\frac{E_2+M}{E_1+M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]-\frac{4k_0}{\lambda^2}+\frac{2}{M}\Bigg\}F_1^N-\Bigg\{\frac{1}{2M}\Big[\left((2E_2-k_0)(W-M)+$$

$$+2M(E_1-M)\right)\frac{Q_0(x)}{qk}+\left((2E_2-k_0)(W+M)-2M(E_1+M)\right)\frac{E_2+M}{E_1+M}\cdot\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+$$

$$+\frac{1}{M(W-M)}\left(3E_1+W-4M\right)\Bigg\}G_M^P-\Bigg\{\frac{1}{M}\Big[\left((2E_2-k_0)(W-M)+2M(E_1-M)\right)\frac{Q_0(x)}{qk}+$$

$$+\left((2E_2-k_0)(W+M)-2M(E_1+M)\right)\frac{E_2+M}{E_1+M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+\frac{2}{M}\Bigg\}G_M^N+$$

$$+2\Bigg\{(2q_0-k_0)\Big[\frac{E_2+M}{E_1+M}\frac{Q_1(y)}{q^2}-\frac{Q_0(y)}{qk}\Big]-\frac{2k_0}{\lambda^2}\Bigg\}F_n\Bigg]$$

$$\bar{S}_2 = \frac{e_r g}{16\pi W}\Bigg[\Bigg\{\frac{2E_2-k_0}{2M}\Big[(W-M)\frac{Q_0(x)}{qk}+(W-M)\frac{E_2-M}{E_1-M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]-\frac{4k_0}{\lambda^2}+$$

$$+\frac{1}{M(W-M)}\left(3E_1+W+2M\right)\Bigg\}F_1^P+\Bigg\{\frac{2E_2-k_0}{M}\Big[(W-M)\frac{Q_0(x)}{qk}+(W+M)\frac{E_2-M}{E_1-M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+$$

$$+\frac{4k_0}{\lambda^2}+\frac{2}{M}\Bigg\}F_1^N-\Bigg\{\frac{1}{2M}\Big[\left((2E_2-k_0)(W+M)-2M(E_1+M)\right)\frac{Q_0(x)}{qk}+$$

$$+\left((2E_2-k_0)(W-M)+2M(E_1-M)\right)\frac{E_2-M}{E_1-M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+\frac{1}{M(W+M)}\left(3E_1+W+4M\right)\Bigg\}G_M^P-$$

$$-\Bigg\{\frac{1}{M}\Big[\left((2E_2-k_0)(W+M)-2M(E_1+M)\right)\frac{Q_0(x)}{qk}+\left((2E_2-k_0)(W-M)+$$

$$+2M(E_1-M)\right)\frac{E_2-M}{E_1-M}\frac{Q_1(x)}{q^2}\Big]+\frac{2}{M}\Bigg\}G_M^N-2\Bigg\{(2q_0-k_0)\Big[\frac{E_2-M}{E_1-M}\frac{Q_1(y)}{q^2}-$$

$$-\frac{Q_0(y)}{qk}\Big]-\frac{2k_0}{\lambda^2}\Bigg\}F_n\Bigg]$$

Lebenslauf

Ich bin am 23. 10. 1935 in Filiatra/Griechenland als Sohn des Pfarrers Athanasius Kotsakis geboren. In Athen, wo meine Familie seit 1938 ansässig ist, besuchte ich die Volksschule und das Gymnasium, welches ich 1953 absolvierte.

Im Herbst 1953 immatrikulierte ich mich als Mathematikstudent an der Athener Universität. Im November 1957 legte ich das Examen mit der Note "sehr gut" ab. 1958 und 1959 leistete ich meinen zweijährigen Wehrpflichtdienst ab. Anschließend war ich als Verwalter einer Assistentenstelle bei Prof. Dr. Plakidis tätig.

Durch ein Stipendium, das mir die Griechische Staatliche Stipendienanstalt für die Zeit von Oktober 1960 bis Juli 1963 gewährte, wurde mein Studium an der Universität München ermöglicht. Nach etwa zweijähriger Tätigkeit in einem mathematischen Repetitorium nahm ich mein Studium auf und fertigte vom Sommer 1965 bis Sommer 1966 eine Diplomarbeit in der Theoretischen Physik als Zulassung zur Promotion an. Die Arbeit, die ich unter Leitung von Herrn Dr. H. Pfister durchführte, hatte den Titel "Analytizität der Quantenelektrodynamik in der Kopplungskonstanten" und wurde mit "sehr gut" benotet. Nach kurzer Beschäftigung bei "Siemens" als Diplom-Mathematiker fing ich im Januar 1967 mit der Anfertigung meiner Doktorarbeit im Institut für Theoretische Physik der Universität München (Prof. Dr. Bopp) unter Leitung von Herrn Dr. H. Pfister an, nachdem die Deutsche Forschungsgemeinschaft die Unterstützung dieser Arbeit übernommen hatte. Im März 1969 kam ich nach Tübingen, wo Herr Dr. Pfister mittlerweile eine neue Stelle angenommen hat. Meine Arbeit unter dem Titel "Elektromagnetische Formfaktoren für virtuelle Nukleonen" beendete ich im März 1970.

Meine akademischen Lehrer waren: Kappos, Foussianis, Brikas, Alexopoulos, Plakidis, Bopp, Koppe, Schlüter, Heinz, Meister, Kostrup, Dürr.

Basil Kotsakis